

Introduction à l'analyse spatiale (Complément de cours)

Serge LHOMME

Introduction historique et épistémologique

La géographie s'appuie historiquement, en particulier en France, sur une démarche d'étude des phénomènes dans leur singularité. Cette démarche est qualifiée *d'idiographique*. Ainsi, la géographie s'est développée en s'appuyant notamment sur de longues monographies concernant des territoires délimités par des caractéristiques physiques, culturelles, historiques ou sociales. Pour la géographie « régionale », cette démarche est fondamentale. En effet, la géographie régionale recherche notamment en quoi chaque combinaison régionale est originale. Le postulat central de la géographie régionale tend même à considérer chaque région étudiée comme unique. Tout le savoir géographique est alors mis au service de cette unicité en évacuant probablement ce qui peut être le plus fécond : c'est à dire ce qui est commun entre les régions. La démarche idiographique tend ainsi à s'opposer à une géographie « générale » qui étudierait les processus et les phénomènes pris par thème, classant les phénomènes et cherchant les règles générales qui les régissent.

L'analyse spatiale est une démarche qui, à l'instar de la géographie « générale », recherche les similarités entre les phénomènes et tente d'établir des *lois* (des règles). Cette démarche est qualifiée de *nomothétique*. En l'occurrence, comme son nom l'indique, l'analyse spatiale recherche ou applique des *lois spatiales*. Ces lois peuvent dans certains cas être testées afin de déterminer leur validité. L'analyse spatiale est donc généralement présentée comme une démarche « hypothético-déductive », puisque les similarités identifiées entre les phénomènes observés peuvent constituer des hypothèses de travail aboutissant à la formulation de *modèles* qui seront mis à l'épreuve. Néanmoins, contrairement aux sciences physiques, les modèles n'ont pas tous vocation à décrire le comportement réel des systèmes étudiés, puis à être testé et validé. Ils peuvent plus simplement servir comme modèle de comparaison. Pour résumer, « *l'analyse spatiale met en évidence des structures et des formes d'organisation spatiale récurrentes, que résumant par exemple les modèles centre-périphérie, les champs d'interaction de type gravitaire, les trames urbaines hiérarchisées, les divers types de réseaux ou de territoires, etc. Elle analyse des processus qui sont à l'origine de ces structures, à travers des concepts comme ceux de distance, d'interaction, de portée spatiale, de polarisation, de centralité, de stratégie ou choix spatial, de territorialité... Des lois de la spatialité relient ces formes et ces processus, et sont intégrées dans des théories et des modèles du fonctionnement et de l'évolution des systèmes* » (Denise Pumain).

Malgré une apparente opposition entre ces deux démarches, celles-ci ne sont pas incompatibles. Bien au contraire, elles apparaissent complémentaires. En effet, la démarche idiographique ne récuse pas toute possibilité de généralisation au nom de l'irréductible unicité des lieux et la démarche nomothétique n'est pas nécessairement réductrice et oublieuse des spécificités locales. C'est en fait entre ces deux attraits de la géographie, la recherche de la régularité d'une part et la fascination pour ce que l'on ne verra pas deux fois

d'autre part, que peut naître une science ayant son objet, sa place et sa propre contribution au sein des sciences humaines (Pumain et Saint-Julien, 2010). Cette dichotomie permet seulement d'introduire, de manière simplifiée, la principale particularité de l'analyse spatiale et la rupture que celle-ci a pu représenter.

Trois concepts apparaissent *in fine* centraux pour définir l'analyse spatiale :

Le concept de loi : Une loi est une formule générale énonçant une relation constante ou habituelle entre des phénomènes. En géographie humaine, les lois sont plutôt considérées comme des références nécessaires aux explications, que l'objet étudié s'y conforme ou qu'il s'en écarte. Dans ce cadre, le terme de loi est souvent considéré comme trop fort et remplacé par le terme de règle, ou encore par celui de régularité. En effet, les relations observées en géographie humaine n'ont pas la précision des lois physiques. Quoi qu'il en soit, les lois expriment l'existence de déterminations, même si d'une part celles-ci ne sont pas connues ou mesurées avec précision, et si d'autre part il entre dans leurs effets une part plus ou moins grande de hasard et d'indétermination. Le terme de loi est aussi employé pour désigner des règles de comportement plutôt invariantes dans le temps et l'espace comme la « loi du moindre effort » énoncée par Zipf. Cette loi montre que « le plus court chemin » ou « la plus grande proximité » ont été souvent privilégiés dans la localisation des activités humaines.

Le concept d'espace : L'espace comme concept géographique, n'est pas une zone, ni un lieu, ni une région du monde, ni un « territoire ». Il se définit par la forme (type et structure des « distances », organisation des espacements, valeur des liens) que prennent les relations entre les lieux, que ce soit pour un individu, pour un groupe, ou pour une entité géographique. En dehors de ce positionnement simple, il existe au moins trois manières de penser l'espace en géographie : l'espace absolu ; l'espace relatif ; l'espace construit (subjectif). Premièrement, l'espace peut être considéré comme une réalité absolue. Ainsi, les conditions géo-climatiques sont vues comme stables, les régions existent en tant que telle, il y a un espace défini de la civilisation occidentale et un espace défini de la civilisation musulmane... Dans un deuxième temps, la réalité spatiale peut aussi être considérée comme le fruit d'un jeu de forces dans le cadre d'un système, faisant que chaque élément du système se situe spatialement en fonction des autres éléments. Ainsi, l'espace n'est plus absolu, il est relatif et évolutif. Enfin, l'espace peut être considéré comme une réalité fluctuante et libre, faisant que les rapports entre les éléments ne sont jamais réellement prédéterminés. Dans ce cadre, l'espace est une construction entièrement subjective.

Le concept de modèle : L'expression de « modèle spatial » recouvre des acceptations et des conceptions différentes. En effet, si les chercheurs de différents domaines peuvent s'accorder sur une définition relativement générale

de la notion de « modèle » comme « *représentation simplifiée de la réalité (d'un processus) en vue de la (le) comprendre et de la (le) faire comprendre* », le référent diffère considérablement suivant les disciplines. En géographie, on distinguera notamment les modèles purement thématiques (géographie urbaine, géographie des risques...) et les modèles informatiques (modèles de données géographiques, modèles agents...). De plus, modéliser des dynamiques spatiales peut être compris de différentes façons : rendre compte des changements de la manière la plus claire possible (logique descriptive) ou rechercher les causalités derrière la forme et la vitesse des évolutions observées (logique explicative). En outre, les modèles déforment la réalité et peuvent s'exprimer dans des langages différents. On peut ainsi distinguer les modèles iconiques, les modèles mathématiques et les modèles informatiques. Il faut également différencier les modèles statiques, qui sont les représentations d'un existant quelconque, et les modèles dynamiques, dont le fonctionnement permet de simuler des processus.

L'analyse spatiale comme rupture¹

« L'avènement » de la démarche nomothétique en géographie a pu constituer une véritable « révolution », puisque la géographie reposait jusqu'alors sur la démarche idéographique. Cette révolution se produit dans les décennies 1950, 1960. Ainsi, la volonté de rupture était telle que les tenants de ce changement paradigmatique n'hésitaient pas alors à parler, pour se distinguer d'une géographie qu'il qualifiait de « classique », de ***Nouvelle Géographie***. Plus précisément, ce fut une révolution essentiellement « ***théorique et quantitative*** » caractérisée par le recours à des analogies issues de la physique et l'utilisation croissante d'outils mathématiques relativement nouveaux. Néanmoins, il est important de préciser que la démarche nomothétique était déjà présente dans des travaux antérieurs. C'est pourquoi, certains modèles présentés dans ce complément de cours sont antérieurs à cette révolution.

Cet avènement souleva de nombreux débats (voire des réticences et des oppositions) qui sont pour certains toujours d'actualité et parfaitement légitimes. En effet, la démarche nomothétique est issue des sciences de la nature, son application dans une discipline qui relève des sciences humaines et sociales soulève donc des questions épistémologiques qui ne sont pas triviales.

Cet avènement fut initié par des géographes travaillant aux Etats-Unis, puis s'est diffusé en Europe, notamment en Grande-Bretagne, en Suède et en Allemagne. L'ouvrage de William Bunge en 1962, *Theoretical geography*, posa les fondations théoriques d'une discipline de l'espace, délimita les objets et offrit les outils. David Harvey effectua quant à lui une importante réflexion épistémologique. Enfin, le manuel de Peter Haggett, *Locational analysis*, en proposant une histoire, une grammaire formelle de l'espace, finit d'établir la « normalité »

¹ Cette partie, comme la partie suivante, reprend et modifie quelque peu certaines parties introductives de la thèse de Thomas Louail. En effet, ces premières parties constituent une bonne introduction (simplifiée) concernant l'avènement de l'analyse spatiale en géographie et présentent cursivement son cadre d'analyse.

de ces nouvelles pratiques, qu'il fallait désormais traiter comme une branche à part entière de la géographie.

Parmi les sujets qui ont été les plus mobilisés au début de cette révolution scientifique figurent les transports et la ville. Ainsi, Edward Ullman, l'un des initiateurs du mouvement, qui a proposé au début des années 1950 que la géographie soit reconnue comme « la science de l'interaction spatiale », a travaillé sur la géographie urbaine et sur la géographie de la circulation. Avec le géographe allemand Walter Christaller, Ullman a conçu une théorie de la ville comme lieu central et a encouragé le développement de la modélisation. Le symposium international de géographie urbaine de Lund en 1960 a marqué la consécration internationale de cette approche théorique et quantifiée de la ville.

En France, les années 1970 vont être déterminantes. Ainsi, la géographie francophone européenne a connu au début des années 1970 des bouleversements majeurs et la « révolution théorique et quantitative » en fait partie. Plusieurs éléments ont permis l'émergence de ce mouvement scientifique. Le développement de l'informatique et le retour de géographes d'outre-Atlantique ont favorisé l'émancipation de jeunes géographes vis-à-vis d'une école de géographie qu'ils voulaient dépasser. Cela leur a permis de penser et de pratiquer la géographie d'une autre manière. Des géographes ont alors pris connaissance par différents moyens (invités étrangers, lectures, traductions) de nouvelles méthodes anglo-américaines, notamment statistiques, susceptibles de renouveler les études géographiques, ainsi que de nouvelles théories, venant par exemple de la physique et permettant de repenser l'étude de l'organisation de l'espace. A noter qu'en 1970 se sont déroulées les Journées Géographiques d'Aix-en-Provence et Bernard Marchand, de retour des Etats-Unis, y a présenté des méthodes statistiques innovantes. Plus encore, le premier colloque sur « l'application des méthodes mathématiques à la Géographie » s'est déroulé à Besançon, inaugurant une série de colloques dans cette même ville et préfigurant les Rencontres actuelles de Theo-Quant.

L'analyse spatiale comme démarche « instituée » et « formalisée »

A l'heure où différentes pressions s'exercent afin que les recherches académiques soient de plus en plus opérationnelles, l'analyse spatiale apparaît comme l'une des approches les plus dynamiques en géographie. Ainsi, bénéficiant notamment des développements de l'informatique, les innovations y sont nombreuses. Dans le même temps, les formations proposant des cours d'analyse spatiale sont en augmentation, et ce notamment dans des masters professionnalisant. Or, comme les fondements de l'analyse spatiale se veulent « théoriques », cette situation peut paraître surprenante. Néanmoins, le caractère « simplificateur » de certains modèles et leur éventuel pouvoir prédictif permettent de répondre à certains besoins opérationnels clairement identifiés : en matière de prospective territoriale (aménagement des territoires), d'analyse de risques, de géomarketing... Comme le souligne le géographe américain Richard Peet, le développement de la géographie quantitative est « intimement lié à des intérêts industriels et commerciaux ».

De surcroît, les « spatialistes » apparaissent comme des acteurs privilégiés pour faire communiquer les « sciences dures » et les « sciences humaines et sociales », au moment où de nombreux laboratoires et de nombreux projets de recherche se veulent transdisciplinaires. En effet, modéliser des phénomènes et des processus spatiaux implique le plus souvent de combiner des savoirs et des compétences relatifs à des domaines divers, les uns liés à la thématique de recherche (généralement issus des sciences humaines et sociales), les autres issus de l'informatique, des statistiques, de la physique ou des mathématiques (*i.e.* des sciences dures). Ces dernières disciplines ouvrent d'ailleurs des perspectives méthodologiques stimulantes pour les théoriciens s'intéressant à l'organisation de l'espace et à l'évolution des structures. En matière de formation, ce domaine à mi-chemin entre les sciences dures et les sciences humaines et sociales permet aux étudiants, qui s'en donnent les moyens, d'acquérir un profil intéressant et recherché par des entreprises commerciales, des bureaux d'études ou des collectivités territoriales.

D'un point de vue méthodologique, les premiers travaux d'analyse spatiale furent fragmentés et ne reposèrent pas sur un cadre théorique bien formalisé. Ce cadre a émergé progressivement. D'ailleurs, certains géographes ont toujours du mal à appréhender ce qu'est l'analyse spatiale et contestent cette dénomination. Pourtant, l'analyse spatiale est désormais une démarche instituée et formalisée reposant par exemple sur un cadre d'analyse comportant trois étapes :

- 1) **Cartographier le phénomène** : La première étape consiste à choisir les observables et à décrire le système au moyen de ces observables. Ce choix se fait en fonction de la question posée. A cette étape, il ne s'agit pas encore de relier les observables dans des formules, mais uniquement de simplifier le système en vue de le représenter en y faisant apparaître ces observables. Cette première étape de représentation peut simplement revenir à cartographier le phénomène observé à l'aide des observables. Pour cela, il est généralement nécessaire d'opérer une opération de collecte de l'information spatiale, puis de quantifier les observables et d'opérer des classifications. On est alors dans une analyse descriptive assez simple des phénomènes. Néanmoins, cette première étape n'est pas neutre. En effet, les choix effectués lors de cette étape conditionnent les étapes suivantes et expliquent en partie les limites de l'analyse menée.
- 2) **La formulation mathématique et statique du phénomène** : La recherche de généralisations (de lois spatiales) conduit à inscrire de multiples configurations observées dans un schéma générique. Plus ce schéma « capture » des configurations existantes plus celui-ci est puissant. Cette étape consiste dès lors à relier entre elles les observables afin de décrire le système à l'aide de formules mathématiques. Ces modèles sont dits « phénoménologiques ». En effet, les modèles produits lors de cette étape sont des modèles théoriques et descriptifs qui sont essentiellement statiques. Ces modèles n'ont pas de valeurs explicatives. Ainsi, leur but est de comprimer les observations dans une ou plusieurs formules qui doivent permettre de reproduire les données, mais aussi de les prévoir sans passer par l'observation directe.

- 3) **La formulation dynamique du phénomène** : L'ambition des modèles produits lors de cette étape est de comprendre la mécanique des phénomènes dans le temps, de les reconstruire en les simulant. Les modèles produits correspondent par exemple aux modèles qui cherchent à reconstruire des villes virtuelles qui présenteront des caractéristiques structurelles semblables à celles observées dans la réalité, ou à interpoler ou extrapoler le développement de villes réelles.

La grille d'analyse présentée ci-dessus n'est qu'un exemple, il en existe d'autres. De plus, celle-ci n'est pas rigide. Ainsi, il n'est pas obligatoire de réaliser les trois étapes décrites pour faire de l'analyse spatiale. Si la première étape est incontournable, il est tout à fait envisageable de s'arrêter à la deuxième étape. L'analyse reste alors phénoménologique et statique. Enfin, il est possible de dépasser cette grille en ajoutant une quatrième étape. Les modèles de cette quatrième étape pourront par exemple tenter d'appréhender les aspects multi-niveaux.

Des modèles, des lois et des théories

Après avoir défini de manière cursive l'analyse spatiale, il convient d'aller plus avant. Pour cela, deux approches sont possibles. La première approche consiste à présenter l'analyse spatiale en s'appuyant sur ses concepts principaux (les concepts d'espace, de lieu, d'interaction, de réseau...). La deuxième approche consiste à se focaliser sur les modèles, les lois et les théories rentrant dans le cadre de l'analyse spatiale. Nous allons privilégier la deuxième approche. En effet, la première approche a déjà fait l'objet de nombreux ouvrages (Bavoux, Pumain et Saint-Julien), il convient donc de ne pas refaire ce qui a déjà été très bien fait. De plus, si théoriquement la première approche est plus didactique, paradoxalement je trouve qu'elle masque aux étudiants les principaux résultats de l'analyse spatiale et par conséquent son utilité. Or, pour des étudiants qui peuvent ne pas être motivés par une discipline qui a recours aux mathématiques, à l'informatique et à la physique, il convient selon moi d'en montrer la portée. Pour cela, la deuxième approche est selon moi la meilleure.

Nous n'allons donc pas disserter ici sur les concepts d'espace, de lieu, d'interaction ou de réseau, bien que ceux-ci soient présents sous différentes formes tout au long de ce complément de cours. Nous allons plutôt nous focaliser sur les modèles, les lois voire les « théories » de l'analyse spatiale. Plus précisément, ces différents modèles vont être présentés au sein de familles qui tentent de les positionner simplement dans un contexte plus général. Ces familles sont arbitraires et ne doivent pas être considérées comme arrêtées. Les principaux modèles « historiques » seront présentés dans ce cadre.

Les modèles hiérarchiques : de la loi rang-taille à la théorie des lieux centraux

De nombreux chercheurs, appartenant à des domaines différents, ont été étonnés par les formes de certaines distributions comme celles des richesses, des populations ou des villes. En effet, ces répartitions mettent en exergue certaines inégalités bien résumées par le

rapport « 80/20 » de Vilfredo Pareto. Ainsi, Vilfredo Pareto demeure célèbre pour avoir constaté que 20% de la population italienne possédait 80% des richesses du pays. Inversement, 80% de la population italienne ne concentre que 20% des richesses. Même si l'on ne retrouve pas toujours ces mêmes rapports dans toutes les distributions (par exemple seulement 2% de la population mondiale concentrait 50% des richesses en 2006), cette propriété particulière de certaines distributions « inégalitaires » est connue sous le terme de « principe de Pareto ». En effet, ces différentes formes d'inégalité peuvent être résumées par des fonctions mathématiques du même type. On parle désormais de « distribution de Pareto ». Par extension, on appelle aussi diagramme de Pareto un type d'histogramme où les classes sont représentées par ordre décroissant de fréquence. Ce diagramme permet notamment de mettre en évidence les classes les plus importantes. En géographie, on se concentrera par exemple sur la répartition des populations au sein de territoires comme les villes. On parle dès lors de hiérarchie urbaine. Il faut souligner ici que le concept de hiérarchie ne signifie pas toujours une hiérarchie de pouvoir qui ferait que les objets d'un niveau dépendraient politiquement ou administrativement du niveau supérieur. Le concept de hiérarchie met plutôt en exergue les inégalités « flagrantes » existant entre les lieux.

Dans cette partie, deux exemples de modèle hiérarchique seront présentés. Il s'agit de deux grands « classiques » de l'analyse spatiale. Premièrement, la loi rang-taille, parfois nommée loi de Zipf, sera présentée. Ce premier modèle est assez simple à appliquer et constitue donc une bonne introduction aux modèles d'analyse spatiale. En l'occurrence, la loi rang-taille permettra d'analyser la hiérarchie des villes. Le deuxième modèle se présente comme une théorie : la théorie des lieux centraux. Cette théorie est plus complexe à mettre en œuvre, car elle requiert de nombreuses compétences. Celle-ci ne fera donc pas l'objet d'une application dans ce complément de cours. Il sera davantage question de critiquer cette théorie. En effet, cette théorie constitue un bon exemple illustrant les limites et les critiques auxquelles sont confrontées beaucoup de modèles d'analyse spatiale.

➤ La loi rang-taille (loi de zipf)

La « loi » rang-taille des villes permet de caractériser en partie la hiérarchie des villes dans un système urbain. Ce sont les travaux pionniers de Auerbach (1913), de Goodrich (1926) et de Singer (1936) qui ont mis en évidence, pour la première fois, l'existence d'un phénomène « rang-taille » des villes. Ces travaux ont été suivis par ceux de Lotka (1941) et de Zipf (1949). Le nom de ce dernier fut associé à une loi statistique selon laquelle la taille des grandes villes d'un système urbain est « proportionnelle » à leur rang (c'est-à-dire au classement par ordre décroissant des tailles des grandes villes). Dans les faits, la loi de Zipf est plus souvent présentée comme une observation empirique concernant la fréquence des mots dans un texte. Elle a pris le nom de son auteur, George Kingsley Zipf (1902-1950), qui par un exemple incongru contribua à populariser cette distribution. La légende raconte que Zipf entreprit d'analyser une œuvre monumentale de James Joyce, *Ulysse*, d'en compter les mots distincts, et de les présenter par ordre décroissant du nombre d'occurrences. La légende dit alors que :

- le mot le plus courant revenait 8 000 fois ;
- le dixième mot 800 fois (8000/10) ;
- le centième 80 fois (8000/100) ;
- et le millième 8 fois (8000/1000).

Ces résultats semblent un peu trop précis pour être parfaitement exacts. Reste que la loi de Zipf prévoit que dans un texte donné, la fréquence d'occurrences $f(n)$ d'un mot est liée à son rang n (dans l'ordre des fréquences d'apparitions) par une loi de la forme [1] où K est une constante :

$$f(n) = P = \frac{K}{n} \quad [1]$$

Cette loi est observée au sein de nombreux systèmes. Ainsi, cette loi peut être observée au sein de certains systèmes urbains. Par exemple, la hiérarchie des villes fut étudiée à l'aide de la relation entre le chiffre de sa population et son rang, en décidant que plus une ville est peuplée plus son rang dans la hiérarchie est élevé (Tableau 1). Sur les graphiques qui représentaient le lien discontinu qui s'établit entre la population de chaque ville (axe vertical : ordonnée) et son rang (axe horizontal : abscisse) l'échelle arithmétique fut remplacée par une échelle logarithmique sur un ou les deux axes (Figure 1). On obtint dès lors une distribution semblant suivre une droite plus ou moins inclinée : on parle de « loi rang-taille » (Figure 1).

Rang de la ville	Population
1	50 400
2	$50\,400 / 2 = 25\,200$
3	$50\,400 / 3 = 16\,800$
4	$50\,400 / 4 = 12\,600$
5	$50\,400 / 5 = 10\,080$
10	$50\,400 / 10 = 5\,040$
20	$50\,400 / 20 = 2\,520$

Tableau 1 : Traduction simple de loi de Zipf, déterminée à partir de la population de la ville principale (de rang 1 = 50 400 ou $K = 50\,400$).

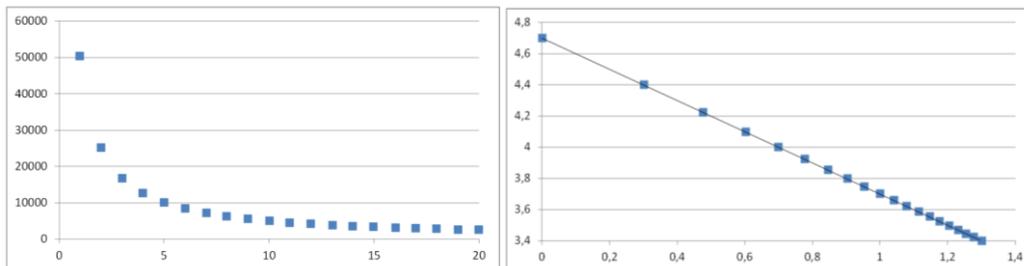


Figure 1 : Graphiques représentant en ordonnée les populations (en l'occurrence le logarithme à droite) et le rang des villes en abscisse (en l'occurrence le logarithme à droite).

D'après George Kingsley Zipf, la « loi rang-taille » a pour principe « le moindre effort », qui « en termes simples [...] signifie, [...], qu'une personne résout ses problèmes immédiats en fonction de ses problèmes futurs [en s'efforçant] de minimiser dans le temps [...] sa dépense de travail ». Dans les faits, la loi de Zipf, à l'instar de la loi de Pareto, est une loi qui illustre le caractère inégalitaire des hiérarchies au sein des systèmes. Ainsi, selon ces lois, il existe peu de grandes villes et beaucoup de petites villes. De même, dans le monde, il y a beaucoup de pauvres pour peu de riches. Quoi qu'il en soit, pour retrouver la loi de Zipf de manière récurrente, il faut la généraliser [2]. β est alors le coefficient de Pareto, dont il est intéressant d'étudier les variations en fonction des systèmes étudiés et du temps. Cette loi de puissance traduit un effet d'agglomération, d'inégalité. C'est à Mandelbrot que l'on doit la dernière généralisation de cette loi, appelée loi de Mandelbrot [3].

$$f(n) = P = \frac{K}{n^\beta} = K \times n^{-\beta} \Leftrightarrow \log P = \log K - \beta \log n \quad [2]$$

$$f(n) = \frac{K}{(a+bn)^\beta} \quad [3]$$

La loi rang-taille est devenue une des lois fondamentales de la géographie urbaine. Historiquement, dans un bref article de quatre pages, Auerbach (1913) fit tout d'abord remarquer la constance singulière de la valeur du produit de la population d'une ville par son rang au sein d'un système urbain donné. Ainsi, la population de la deuxième plus grande ville représente à peu près la moitié de la population de la première, celle de la troisième ville représente un tiers de la première et, de façon plus générale, la population de la ville de rang n correspond à une proportion $1/n$ de la population de la plus grande ville. Auerbach établit, dès lors, un premier modèle rang-taille où le nombre des villes est en relation inverse avec leur poids démographique.

Durant la première moitié du XX^{ème} siècle, hormis une étude comparative de Singer (1936) sur la distribution des villes dans sept pays, le modèle rang-taille reste à la marge des constructions en économie spatiale. Il faut attendre les travaux de Zipf et surtout leur reformulation par Simon (1955), Beckmann (1958) et Berry (1961) pour que la loi rang-taille apparaisse comme une « *contrainte de comportement des masses* » (Isard, 1960) dont la régularité dans le temps exige une interprétation théorique de l'organisation des systèmes urbains. Désormais, de nombreux chercheurs ont testé la validité de la loi de Zipf sur la distribution rang-taille des villes au sein de différents systèmes urbains (Tableau 2).

L'exemple de la France est intéressant. En effet, l'analyse de la hiérarchisation du système urbain français souligne le poids écrasant de Paris. Ainsi, si l'on compare les populations des villes françaises les plus peuplées aux résultats obtenus par un modèle simple de la loi rang-taille ($\beta=1$) et en se fondant sur la population parisienne ($K = 10\,587\,309$), on obtient de mauvais résultats, puisque les populations théoriques surestiment largement les populations réelles des autres villes françaises (Tableau 3). Cette analyse vient conforter l'image d'un pays centralisé où les pouvoirs politiques et économiques se concentrent à Paris, contrairement à des états fédéraux comme les Etats-Unis ou l'Allemagne. D'ailleurs, les résultats obtenus à l'aide de la même démarche avec les villes américaines sont apparemment

en conformité avec ce que l'on pouvait attendre (Tableau 4), puisque les résultats du modèle apparaissent meilleurs pour les villes américaines. L'inégalité concernant la répartition de la population au sein des villes françaises est donc bien réelle.

Néanmoins, il ne faudrait pas conclure de l'exemple précédent que la loi rang-taille ne s'applique pas aux villes françaises. Dans les faits, la loi rang-taille généralisée rend plutôt bien compte de la hiérarchisation du système urbain français (Figure 2). Pour le vérifier, vous pouvez télécharger les données issues de l'INSEE ou les récupérer sur Wikipedia. Ensuite, il faut mettre ces tableaux en forme sous Excel, puis transformer les valeurs des rangs et des populations en utilisant la fonction log. Enfin, il suffit de représenter les données sous la forme d'un nuage de points avec le log de la population en ordonnée et le log des rangs en abscisse, puis d'afficher une courbe de tendance avec ses valeurs (Figure 2).

Auteur	Nombre de pays	Dates	Coefficient β
Singer (1936)	7 pays (villes > 2000 hab.)	Début XXème siècle	1.15
Rosen et Resnick (1980)	78 pays (au moins 30 villes par pays)	1970	1.13
Brakman et al. (1999)	Allemagne 42 villes	1990	1.13
Rey et Yé (2006)	USA (160 villes)	Plusieurs dates entre 1960 et 2000	[0.8 ; 0.9]

Tableau 2 : Quelques exemples d'application de la loi rang-taille (Schaffar, 2009).

Rang	Ville	Population	Population théorique	Ecart
1	Paris	10 587 309	10 587 309	-
2	Lyon	1 572 540	5 293 654	+ 237%
3	Marseille – Aix	1 368 138	3 529 103	+ 158%
4	Lille-T-Roubaix	1 106 091	2 646 827	+ 139%
5	Bordeaux	870 529	2 117 462	+ 143%
6	Toulouse	862 701	1 764 551	+ 105%
7	Nantes	640 805	1 512 472	+ 136%
8	Nice	558 213	1 323 413	+ 137%
9	Strasbourg	543 716	1 176 368	+ 116%
10	Grenoble	502 264	1 058 731	+ 111%
15	Nancy	401 177	705 820	+ 76%
		19 013 483	31 715 710	+ 67%

Tableau 3 : Application de la loi rang taille aux villes françaises avec $\beta = 1$ et en se fondant sur la population parisienne. Ainsi $f(n) = 10\,587\,309 / n$.

Rang	Ville	Population	Population théorique	Ecart
1	New York	8 175 133	8 175 133	-
2	Los Angeles	3 743 995	4 087 566	+ 9%
3	Chicago	2 707 120	2 725 044	+ 1%
4	Houston	2 099 451	2 043 783	- 3%
5	Philadelphie	1 556 396	1 635 026	+ 5%
6	Phoenix	1 445 632	1 362 522	- 6%
7	San Antonio	1 296 682	1 167 876	- 9%
8	San Diego	1 256 951	1 021 891	- 18%
9	Dallas	1 232 940	908 348	- 26%
10	San José	945 942	817 513	- 13%
15	Detroit	713 777	545 008	- 23%
		25 174 019	24 489 713	- 3%

Tableau 4 : Application de la loi rang taille aux villes américaines avec $\beta = 1$ et en se fondant sur la population new-yorkaise. Ainsi $f(n) = 8\,175\,133 / n$.

On constate alors que la droite obtenue s'approche bien des valeurs réelles. Ainsi, avec un R^2 de 0,98 les résultats peuvent être jugés satisfaisants. Seules les valeurs de Paris et de Lyon semblent s'éloigner de cette droite, soulignant, une fois de plus, le poids excessif de la région parisienne. L'application de cette méthode aux villes américaines montre que la loi rang-taille s'applique aussi bien à la France qu'aux Etats-Unis (les valeurs de R^2 sont très proches). Enfin, le coefficient placé devant le x (s'apparentant à l'opposé du coefficient de Pareto) indique le caractère plus inégalitaire de la répartition de la population au sein du système urbain français qu'au sein du système urbain américain.

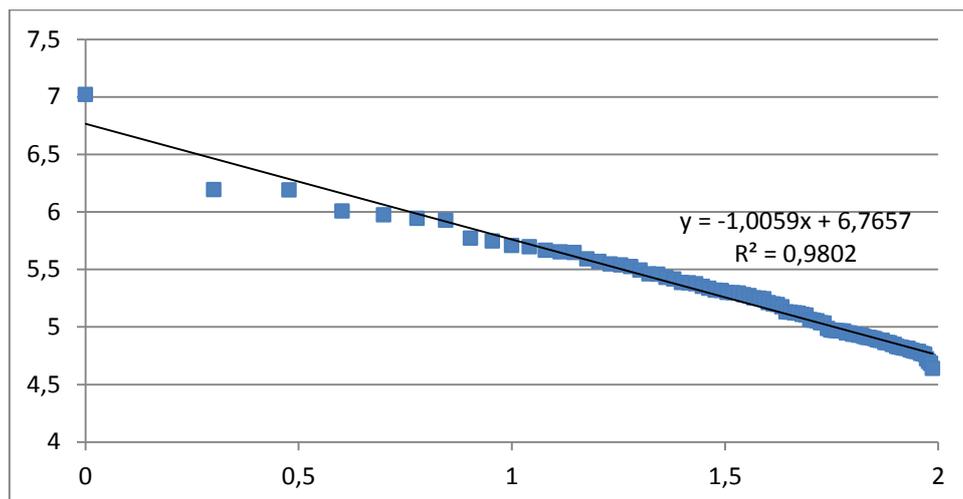


Figure 2 : Application de la loi rang-taille aux cent premières agglomérations françaises (population 2010). Log de la population en ordonnée et Log du rang en abscisse.

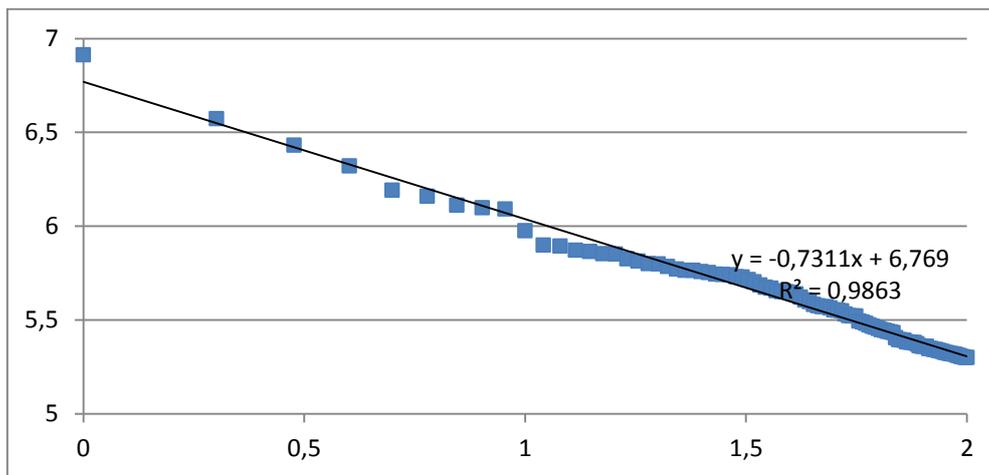


Figure 3 : Application de la loi rang-taille aux cents premières agglomérations américaines (population 2010). Log de la population en ordonnée et Log du rang en abscisse.

Pour conclure avec la loi rang-taille, il est possible d'ajouter que l'on peut la retrouver au sein de systèmes urbains comme les régions, comme c'est le cas pour les régions françaises.

➤ La théorie des lieux centraux

La théorie des lieux centraux est plus complexe à manipuler et à appréhender que la loi rang-taille. Cette théorie a été conçue, principalement par W. Christaller et A. Lösch, pour expliquer la taille, le nombre des villes et leur espacement dans un territoire donné. Elle s'appuie sur une définition de la ville qui en fait essentiellement un centre de distribution de biens et de services pour une population dispersée, et sur des principes d'optimisation (qui tiennent compte des coûts de transport). Pour W. Christaller, l'importance d'une ville est liée à celle de la clientèle périphérique à qui elle procure un certain nombre de biens et de services. Cette clientèle n'est pas extensible à l'infini car le coût de transport s'ajoute à celui du bien et du service, et comme il augmente avec la distance, le coût du déplacement devient dissuasif comparé à l'attrait du produit. On appelle alors « portée d'un bien ou d'un service » la distance maximale que la clientèle est prête à parcourir pour se le procurer. Si seul comptait l'intérêt du consommateur, la portée serait faible et l'offre de services très dispersée. Mais cette offre ne peut être rentable que si des économies d'échelle sont possibles, et donc si le service n'est offert que lorsque existe un certain volume de clientèle à satisfaire.

Les deux principaux postulats de la théorie des lieux centraux sont les suivants :

- Les biens qui ont des portées comparables se regroupent dans les mêmes centres (ce qui implique des économies d'échelle et des économies d'agglomération pour les producteurs comme pour les consommateurs) ;
- Les centres de niveau supérieur offrent tous les biens et services offerts par les centres de niveau inférieur.

Combinés à des hypothèses simplificatrices concernant l'espace géographique, ces postulats donnent une disposition prévisible des centres de différents niveaux dans l'espace

géographique. Ainsi, si la population est répartie de manière uniforme avec le même pouvoir d'achat, si les conditions de circulation sont partout identiques et si l'accès au marché est parfaitement libre, alors les lieux centraux peuvent être disposés selon des figures géométriques relativement simples (Figure 4). En se fondant sur ces hypothèses simplificatrices, W. Christaller imagina trois principes déterminant trois types de configuration spatiale des centres :

- Selon le principe de marché, qui est aussi un principe d'équité spatiale, le nombre de centres est maximisé. Les consommateurs ont alors des chances d'accès au centre qui sont les moins inégales possibles. C'est le cas lorsque les centres sont disposés au centre de triangles équilatéraux, la clientèle de chaque centre de niveau inférieur se partageant également entre trois centres de niveau supérieur (Figure 4 gauche) : le rapport $K=3$ représente ainsi le facteur multiplicatif entre le volume de clientèle d'un centre de niveau supérieur et celui d'un centre de niveau immédiatement inférieur ; le rapport entre les rayons de deux hexagones successifs est de $\sqrt{3}$.
- Le principe de transport correspond à la volonté de réduire la longueur des infrastructures nécessaires à la desserte des centres que le schéma triangulaire tend à allonger. En les déplaçant, pour les situer au milieu des côtés des hexagones (Figure 4 centre), on détériore légèrement l'égalité d'accès des clients aux centres, mais on améliore l'égalité du transport dans le système. Le rapport entre le volume de clientèle d'un centre et celui d'un centre de niveau inférieur est alors de $K=4$.
- Selon le principe d'administration, la clientèle d'un centre ne peut pas se partager entre des centres concurrents. La clientèle est au contraire incluse en totalité dans une circonscription. De nombreux systèmes urbains s'étant constitués en incluant ce principe administratif d'attribution exclusif, W. Christaller imagine un système spatial où les hexagones sont emboîtés en totalité dans l'hexagone de niveau supérieur (Figure 4 droite), ce qui donne une hiérarchie des centres avec un rapport $K = 7$.

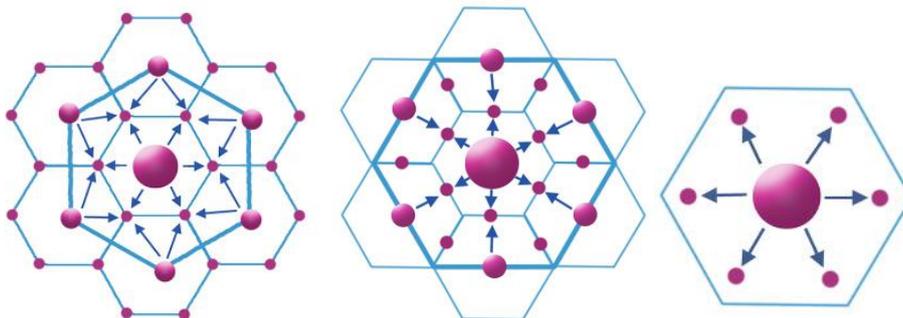


Figure 4 : Les représentations géométriques des trois principes de la théorie des lieux centraux. De la gauche vers la droite : $K = 3$, $K = 4$ et $K = 7$.

A partir de ces formes géométriques, W. Christaller détermine aussi quels pourraient être le nombre et l'espacement des centres dans chacune de ces hiérarchies théoriques (Tableau 5).

Niveau	K = 3	K = 4	K = 7
A	1	1	1
B	2	3	6
C	6	12	42
D	18	48	294
E	54	172	2058
F	162	698	14406

Tableau 5 : Le nombre et l'espacement des centres dans chacune des hiérarchies théoriques

Les critiques concernant la théorie des lieux centraux sont nombreuses. En effet, cette théorie concentre presque la totalité des critiques qu'il est possible d'émettre au sujet des modèles d'analyse spatiale. La principale critique concerne l'aspect éminemment utopique de cette théorie, puisque les formes géométriques produites par ce modèle semblent peu représentatives de la réalité des systèmes urbains. Néanmoins, on ne saurait récuser la théorie des lieux centraux au nom de la seule irréalité des modèles géométriques qu'elle permet de prévoir. A l'instar de la loi rang-taille, peu importe que les modèles d'analyse spatiale représentent la réalité et peu importe que ceux-ci soient « universels ». Ces modèles « idéaux » (« théoriques », « utopiques ») permettent avant tout de caractériser certains phénomènes. Si le modèle de W. Christaller ne semble pas représentatif de la réalité, c'est qu'il souligne tout simplement le caractère « anisotrope » des espaces géographiques. Compte tenu des nombreuses contraintes physiques, culturelles et politiques, il n'est pas possible de trouver une telle régularité dans l'espacement des villes (comme cela se pourrait dans un milieu isotrope). Dans les faits, l'hypothèse d'uniformité d'où se déduisent les rapports fondamentaux de dimension et d'espacement entre lieux centraux peut difficilement être retenue dans la mesure où elle contredit, du moins à certaines échelles, l'hétérogénéité de la répartition spatiale du peuplement liée à l'existence même des centres. C'est bien plus la situation dans un espace d'accessibilité qui détermine la hiérarchie des centres en milieu urbain que leur position en termes de distances physiques.

Les modèles de flux : du modèle gravitaire au modèle de Huff

Le géographe Peter Hagett commençait son ouvrage sur l'analyse spatiale en Géographie humaine publié en 1967 par la notion de mouvement. En effet, ce sont les déplacements entre des lieux différents qui construisent l'espace géographique. Pour caractériser ces mouvements, on fait appel à la notion de flux. Plus précisément, on appelle « flux », l'écoulement, le transfert d'une certaine quantité de personnes, de véhicules, d'informations, de marchandises transportés par un moyen de communication. L'analyse des flux en analyse spatiale est donc centrale. Il n'est donc pas étonnant que des modèles de flux aient émergé.

Ces modèles peuvent aussi être présentés comme des modèles d'attraction. Deux de ces modèles seront présentés dans ce complément de cours. Le premier modèle est le modèle gravitaire qui permet de présenter un modèle d'analyse spatiale issu d'une analogie avec la physique. Le second est le modèle de Huff qui découle directement du modèle gravitaire. Ce modèle trouve des applications en géomarketing et permet d'illustrer les potentialités opérationnelles offertes par certains modèles d'analyse spatiale.

➤ Le modèle gravitaire

Le modèle gravitaire est destiné à formaliser, à étudier, à reproduire et à prévoir les interactions. En effet, la répartition des interactions dans un ensemble de lieux dépend de leur configuration, c'est-à-dire des forces d'attraction et des difficultés de communications entre chaque lieu. Le modèle gravitaire a été formulé par analogie avec la loi de la gravitation universelle de Newton : deux corps s'attirent en raison directe de leur masse et en raison inverse de la distance qui les sépare. De même, dans un espace de circulation relativement homogène, les échanges entre deux régions ou deux villes seront d'autant plus importants que le poids des villes ou des régions est grand et d'autant plus faibles qu'elles seront éloignées. Dans les faits, comme ont pu l'écrire R. Brunet et O. Dollfus, « *tout se passe "comme si" tout lieu dans l'espace géographique exerçait sur les autres une attraction en fonction directe de sa masse et en fonction inverse de la distance qui les sépare de lui* ». Ainsi le flux F_{ij} entre deux zones i et j est directement proportionnel au produit des masses P_i et P_j de chaque zone et inversement proportionnel à la distance d_{ij} qui les sépare [4], cette distance jouant un rôle plus ou moins important en fonction d'une valeur n ($n=2$ dans la loi de la gravitation universelle de Newton). Enfin, k est une constante déterminée lors de l'ajustement du modèle.

$$F_{ij} = \frac{k \times P_i \times P_j}{d_{ij}^n} = k \times P_i \times P_j \times d_{ij}^{-n} \quad [4]$$

Le modèle gravitaire résume bien l'essentiel des mouvements qui se produisent dans un milieu où la mobilité et l'accessibilité sont relativement homogènes. Il prédit par exemple assez bien l'ampleur des flux de déplacements domicile-travail dans un bassin d'emploi urbain, à partir de la répartition des zones de résidence et des zones d'emploi. De plus, le modèle gravitaire est très employé pour analyser les flux de migration et pour délimiter les zones de chalandise en marketing (loi de Reilly). Cette formulation simple a été améliorée pour rendre le modèle opérationnel, en particulier grâce aux travaux d'A. Wilson. Des expressions plus raffinées du modèle sont aussi utilisées pour la prévision des besoins en infrastructures de transport. Enfin, sous diverses formes, la formulation gravitaire de l'interaction spatiale est reprise dans de très nombreux modèles plus complexes. Voir ci-dessous des exemples de généralisation du modèle :

$$F_{ij} = k \times P_i^{b_1} \times P_j^{b_2} \times e^{(-n \times d_{ij})} : \text{modèle gravitaire exponentiel} \quad [5]$$

$$F_{ij} = a_i \times O_i \times b_j \times D_j^{(-n) \times T_{ij}} : \text{modèle entropique de Wilson} \quad [6]$$

$$F_{ij} = \frac{(P_i + P_j)}{d_{ij}} : \text{modèle additif de Tobler} \quad [7]$$

Pour donner un exemple d'application du modèle gravitaire, nous allons utiliser les éléments de cours diffusés par Claude Grasland. L'objectif est de reproduire les migrations au sein de la Tchécoslovaquie. Pour ce calcul, deux sources de données sont utilisées : les populations des régions de Tchécoslovaquie (Tableau 6) ; les migrations de population entre les régions (Tableau 7).

I	Code	Région	République	Population
1	BC	Bohême-Centre	Tchèque	2 333 670
2	BS	Bohême-Sud	Tchèque	698 568
3	BO	Bohême-Ouest	Tchèque	869 445
4	BN	Bohême-Nord	Tchèque	1 190 781
5	BE	Bohême-Est	Tchèque	1 239 979
6	MS	Moravie-Sud	Tchèque	2 058 234
7	MN	Moravie-Nord	Tchèque	1 971 580
8	SO	Slovaquie-Ouest	Slovaque	2 164 548
9	SC	Slovaquie-Centre	Slovaque	1 611 930
10	SE	Slovaquie-Est	Slovaque	1 499 708
<i>Tchécoslovaquie</i>				<i>15638443</i>

Tableau 6 : Population des régions de Tchécoslovaquie en 1989.

	BC	BS	BO	BN	BE	MS	MN	SO	SC	SE	Total
BC		2096	1792	3025	2411	1110	793	395	284	282	12188
BS	2420		756	543	360	853	348	153	91	106	5630
BO	2635	1081		1312	399	553	369	213	211	146	6919
BN	4120	1073	1542		1406	648	535	220	183	292	10019
BE	3530	610	471	1275		1210	781	211	141	122	8351
MS	2187	1337	669	702	1267		2643	707	338	239	10089
MN	1852	593	662	682	1017	3143		599	623	370	9541
SO	668	177	249	225	226	737	559		3126	732	6699
SC	524	168	266	251	188	396	801	3839		1229	7662
SE	769	206	292	534	302	444	689	1567	1487		6290
Total	18705	7341	6699	8549	7576	9094	7518	7904	6484	3518	83388

Tableau 7 : Migrations inter-régionales de population en Tchécoslovaquie en 1989. (de : en ligne ; à : en colonne).

Dans ce calcul, la population des régions est utilisée pour déterminer les valeurs quantitatives de leur poids. L'hypothèse est donc que plus une région a une population élevée, plus elle attire les habitants des autres régions et plus le nombre de personnes pouvant la quitter est élevée. En utilisant les distances entre les centres de gravité des

régions, on peut déterminer les valeurs des coefficients du modèle gravitaire afin de minimiser les écarts entre les flux réels et les flux estimés par le modèle [8]².

$$F_{ij} = 3.34 \times 10^{(-7)} \times P_i \times P_j \times d_{ij}^{(-1.31)} \quad [8]$$

On déduit à partir de l'équation précédente les flux théoriques F_{ij}^* qui devraient être observés si les flux ne dépendaient que de la population des régions et de la distance qui les sépare avec une précision satisfaisante ($r^2 = 57\%$) (Tableau 8). Cette application fait apparaître une des propriétés majeures de cette loi. Les flux théoriques obtenus sont symétriques $F_{ij}^* = F_{ji}^*$. Or, bien souvent, comme le montre les valeurs réelles, ces flux sont dissymétriques. Cet exemple montre une des principales limites de ce modèle pour le calcul de flux. Néanmoins, les résultats obtenus avec ce modèle sont meilleurs que ceux obtenus avec un modèle qui ne tient pas compte des distances ($F_j = k \times P_i \times P_j$).

Dans un deuxième temps, on peut calculer la matrice des résidus du modèle d'interaction spatiale en effectuant la différence entre les flux observés et les flux théoriques : $R_{ij} = F_{ij} - F_{ij}^*$ (Tableau 9). Enfin, l'analyse des marges de la matrice des résidus permet de repérer les régions qui ont globalement reçu ou envoyés plus (ou moins) de migrants que ce que laissait prévoir le modèle. On peut en déduire des coefficients de mobilité résiduelle ou d'attractivité résiduelle (Tableau 10).

On l'aura compris, le modèle gravitaire ne sert pas uniquement à prévoir ou à reproduire des flux entre des lieux. Ce modèle peut d'ailleurs se révéler assez imprécis dans ce contexte. Il permet aussi de souligner certaines « anormalités » : émission et réception très élevées ou très faibles lorsqu'on tient compte de l'importance des lieux et des distances entre ces lieux.

F*ij	BC	BS	BO	BN	BE	MS	MN	SO	SC	SE	Total
BC		1389	1498	3548	2344	1874	1279	944	560	347	13782
BS	1389		366	352	413	668	355	345	179	106	4172
BO	1498	366		662	335	407	290	260	154	102	4075
BN	3548	352	662		806	649	529	378	241	159	7327
BE	2344	413	335	806		1725	1396	673	422	243	8357
MS	1874	668	407	649	1725		3250	2479	1120	512	12685
MN	1279	355	290	529	1396	3250		1840	1450	646	11034
SO	944	345	260	378	673	2479	1840		2415	778	10112
SC	560	179	154	241	422	1120	1450	2415		1205	7747
SE	347	106	102	159	243	512	646	778	1205		4097

Tableau 8 : Migrations estimées par le modèle gravitaire.

² Le détail du calcul permettant d'obtenir les coefficients de ce modèle ne sera pas exposé ici. Pour cela, il faut se reporter à la page 45.

Rij	BC	BS	BO	BN	BE	MS	MN	SO	SC	SE	Total
BC	0	707	294	-523	67	-764	-486	-549	-276	-65	-1594
BS	1031	0	390	191	-53	185	-7	-192	-88	0	1458
BO	1137	715	0	650	64	146	79	-47	57	44	2844
BN	572	721	880	0	600	-1	6	-158	-58	133	2692
BE	1186	197	136	469	0	-515	-615	-462	-281	-121	-6
MS	313	669	262	53	-458	0	-607	-1772	-782	-273	-2596
MN	573	238	372	153	-379	-107	0	-1241	-827	-276	-1493
SO	-276	-168	-11	-153	-447	-1742	-1281	0	711	-46	-3413
SC	-36	-11	112	10	-234	-724	-649	1424	0	24	-85
SE	422	100	190	375	59	-68	43	789	282	0	2193
Total	4923	3169	2624	1222	-781	-3591	-3516	-2208	-1263	-579	0

Tableau 9 : Résidus des migrations estimées par le modèle gravitaire.

I	Emissions	Réception	Mobilité	Attractivité
BC	-1594	4923	3328	6517
BS	1458	3169	4626	1711
BO	2844	2624	5468	-220
BN	2692	1222	3915	-1470
BE	-6	-781	-786	-775
MS	-2596	-3591	-6187	-995
MN	-1493	-3516	-5010	-2023
SO	-3413	-2208	-5620	1205
SC	-85	-1263	-1347	-1178
SE	2193	-579	1613	-2772

Tableau 10 : Analyse des marges de la matrice des résidus.

➤ Le modèle de Huff

L'émergence du modèle gravitaire en analyse spatiale est notamment liée à des questions de natures économique et commerciale. En effet, en 1931, Reilly formula une loi concernant l'organisation des zones d'attraction commerciale qui reprend la formulation du modèle gravitationnel de Newton. Cette loi est fondée sur des observations empiriques qui quantifient les attractions commerciales entre différentes villes. Elle est désormais nommée « loi de Reilly ». C'est à ma connaissance la première formulation du modèle gravitaire en analyse spatiale. L'énoncé de la loi de « gravitation commerciale » est le suivant : « *deux centres (situés dans deux villes différentes) attirent les achats des populations situées entre elles en proportion directe du nombre total d'habitants des villes considérées et en proportion inverse du carré de la distance qu'il faut parcourir pour y s'y rendre* ». Cette loi se fonde sur deux postulats :

- 1) les deux pôles (centres) sont accessibles de manière équivalente par le consommateur, l'espace est donc homogène;

2) les deux commerces ont la même efficacité.

Par la suite, cette loi a été généralisée en amenuisant le rôle assigné à la distance [9]. En effet, élever au carré la valeur de la distance (comme dans la loi de la gravitation universelle) n'est valable que pour certains types de relations. La diminution de l'influence d'un pôle (d'un centre) selon le carré de la distance peut s'avérer trop forte dans le cas de biens rares et coûteux, ou au contraire trop faible dans le cas des services banals, des biens à faible coût, ou dans le cas d'un coût de déplacement trop élevé par rapport au bien à acheter. On obtient alors l'expression de la loi de Reilly suivante :

$$\frac{V_a}{V_b} = \left(\frac{P_a}{P_b}\right)^\alpha \times \left(\frac{D_b}{D_a}\right)^\beta \quad [9]$$

Avec : V_a = ventes dans la ville a auprès de la population de la ville X ; V_b = ventes dans la ville b auprès de la population de la ville X ; D_a = distance séparant la ville a ; D_b = distance séparant la ville b ; P_a = population de la ville a ; P_b = population de la ville b ; α = exposant indiquant le taux auquel l'attraction d'une ville s'accroît à mesure que la population de cette ville augmente ; β = exposant indiquant le taux auquel l'attraction d'une ville décroît à mesure que la population de cette ville augmente (α et β sont compris entre 0 et l'infini).

Par la suite, Converse (1951) établit un modèle permettant de délimiter les frontières des aires d'influence entre deux pôles commerciaux. En l'occurrence, ce modèle s'applique plutôt à des centres urbains. Pour cela, il s'appuya sur le modèle gravitaire et les travaux de Reilly. Plus précisément, ce modèle permet de déterminer un point d'équilibre (*breaking point*) entre les zones de desserte de deux centres urbains. Ce point de partage (ou d'équilibre) définit la limite entre les aires d'influence de deux villes de taille P_a et P_b séparées par une distance D_{ab} , car au niveau de la frontière V_a et V_b sont équivalents, on a donc $V_a/V_b = 1$. Converse considère $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. La formule de Reilly devient dès lors la suivante [10]. Converse établit donc la formule D_{xb} du point d'équilibre [11]. Cette formule indique simplement le point où la masse des consommateurs se partage entre les deux pôles concurrents de façon équivalente (c'est une zone d'indifférence).

$$\frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{D_a}{D_b}\right)^2 \quad [10]$$

$$D_{xb} = \frac{D_{ab}}{1 + \sqrt{P_a/P_b}} \quad [11]$$

Ce modèle peut être utilisé afin de calculer des « zones de chalandise » (une zone de chalandise est une zone au sein de laquelle un commerce attire de manière privilégiée les clients potentiels). Dans ce cadre, le poids d'un commerce peut être évalué à l'aide de sa surface commerciale. L'hypothèse faite est la suivante : plus un commerce est grand, plus il va attirer les clients. Ainsi, prenons un exemple très simple, où l'on cherche à déterminer la zone de chalandise d'un commerce L . Pour cela, nous disposons des distances entre le commerce L et les commerces concurrents. De surcroît, pour chacun de ces commerces, nous disposons des surfaces commerciales (Figure 5).

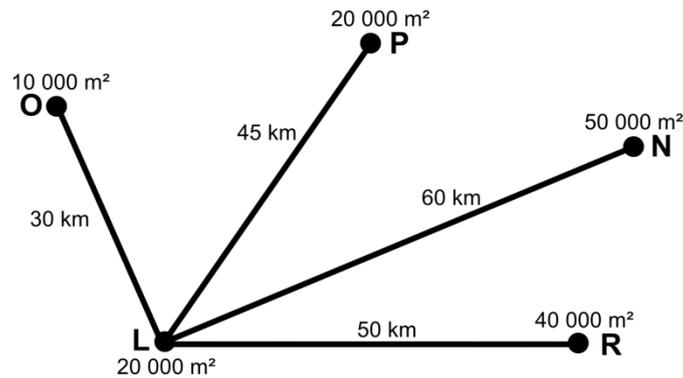


Figure 5 : Les données nécessaires au calcul de la zone de chalandise du commerce L.

Pour délimiter cette zone de chalandise, il suffit de calculer l'ensemble des points de partage à l'aide de la formule ci-dessus. Ainsi, on obtient :

$$D_{xO} = \frac{D_{LO}}{1 + \sqrt{P_L/P_O}} = \frac{30}{1 + \sqrt{20/10}} = 12,4 \text{ km} \rightarrow D_{xL} = 17,6 \text{ km}$$

De même, on obtient les distances suivantes : $D_{xP} = 22,5 \text{ km}$; $D_{xN} = 36,7 \text{ km}$; $D_{xR} = 29,4 \text{ km}$. On peut alors dessiner la zone de chalandise du commerce L (Figure 6).

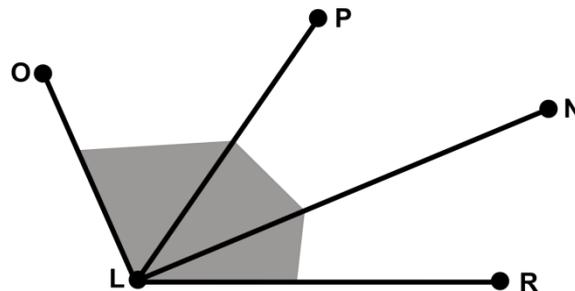


Figure 6 : La zone de chalandise du commerce L.

D'autres méthodes permettent, à partir de ce modèle, de calculer des zones de chalandise ou encore des potentiels d'activité pour des points de vente. Ainsi, la méthode de Huff et la méthode MCI sont des méthodes particulièrement intéressantes qui permettent de prendre en considération, non seulement la clientèle présente, mais aussi les établissements concurrents pour établir la qualité d'un emplacement et le taux de pénétration théoriquement atteignable par un commerce.

Plus précisément, le modèle de Huff est un modèle qui permet de calculer la probabilité qu'un individu soit client d'un point de vente en fonction de sa localisation et de l'attractivité des autres points de vente. C'est le premier modèle probabiliste d'attraction. Huff suggère d'utiliser une approche dite « des préférences révélées ». Le postulat principal du modèle est le suivant : l'attraction d'un magasin dépend de sa taille, de la distance à parcourir pour y accéder et du nombre de magasins présents dans la zone géographique donnée. En termes mathématiques : pour tout consommateur i , l'attraction exercée par un point de vente j (la probabilité que les clients s'y rendent P_{ij}) est directement proportionnelle à la taille de j (S_j)

et inversement proportionnelle à la distance entre i et j (D_{ij}). Pour tout consommateur i , la probabilité de choisir le point de vente j est égale à l'attraction de j , divisée par la somme des attractions des autres points de vente k .

$$P_{ij} = \frac{\frac{S_j}{d_{ij}^\lambda}}{\sum_{j=1}^r \frac{S_j}{d_{ij}^\lambda}} \quad [12]$$

Avec : P_{ij} = probabilité qu'un consommateur localisé en i se rende dans le centre commercial localisé en j ; d_{ij} = distance entre i et j (cette distance peut être exprimée par des temps de parcours) ; S_j = taille du centre commercial localisé en j ; λ = paramètre à calibrer qui varie selon le type de centre commercial ; r = nombre de localisations des centres commerciaux.

A titre d'exemple, à l'aide du modèle de Huff, il est possible d'évaluer le nombre de clients probables de trois hypermarchés H1, H2 et H3. Pour les trois hypermarchés, on connaît le temps de déplacement moyen des clients potentiels qui sont regroupés au sein de trois quartiers A, B et C. On connaît aussi les surfaces des rayons des hypermarchés.

Temps de déplacement			Hypermarchés	Surfaces des rayons		
				Alimentation $\lambda = 1$	Vestimentaire $\lambda = 2$	Mobilier $\lambda = 3$
TA	TB	TC				
15'	30'	10'	H1 2 500 m ²	1 500 m ²	500 m ²	500 m ²
10'	10'	15'	H2 2 000 m ²	1 000 m ²	400 m ²	600 m ²
20'	10'	18'	H3 2 300 m ²	1 300 m ²	700 m ²	300 m ²

Tableau 11 : Ensemble des données concernant les hypermarchés et les temps de parcours moyens pour se rendre à ces hypermarchés depuis les trois quartiers regroupant les clients potentiels (Cicéri et al., 2012). Le rôle de la distance n'est pas le même pour chaque rayon (λ différents).

En utilisant le modèle de Huff, on peut obtenir les probabilités qu'un client se rende dans un hypermarché plutôt que dans un autre. Plus précisément, en appliquant ce modèle au rayon alimentaire, on obtient les probabilités qu'un habitant du quartier A se rende dans les hypermarchés H1 (P_{AH1}), H2 (P_{AH2}) et H3 (P_{AH3}) :

$$P_{AH1} = \frac{1500/15}{(1500/15 + 1000/10 + 1300/20)} = 0,377$$

$$P_{AH2} = \frac{1000/10}{(1500/15 + 1000/10 + 1300/20)} = 0,377$$

$$P_{AH3} = \frac{1300/20}{(1500/15 + 1000/10 + 1300/20)} = 0,245$$

Enfin, en effectuant ces calculs pour les autres quartiers et en se fondant sur les recensements des habitants des quartiers A, B et C, on obtient les résultats suivants :

	A	B	C	A (1500)	B (1500)	C (1500)	Total
H1	0.377	0.178	0.520	565	356	832	1 753
H2	0.377	0.357	0.229	565	714	366	1645
H3	0.245	0.464	0.250	367	928	400	1695

Tableau 12 : Récapitulatif des résultats obtenus pour l'alimentation par le modèle de Huff (Cicéri et al., 2012).

Ainsi, le modèle de Huff nous a permis de déterminer le nombre de clients se rendant dans les différents hypermarchés pour l'alimentation. En tenant bien compte du coefficient λ , ces calculs peuvent être reproduits pour les rayons vestimentaires et le mobilier.

Les modèles de réseaux théoriques : les réseaux *small-world* et *scale-free*

Compte tenu de l'importance des flux en géographie, la notion de réseau y est aussi centrale. En effet, en géographie, les flux se définissent à partir de lieux (ou d'acteurs) au préalable disjoints constituant un réseau de lieux (ou d'acteurs). Considérer un réseau en analyse spatiale revient donc à expliciter les relations entre des lieux ou des objets, c'est-à-dire à prendre en compte de manière concrète le fait que les unités d'observation ne sont pas des éléments indépendants (Pumain et St-Julien, 2010). Il n'existe d'ailleurs pas de territoire sans réseau. Un territoire est une portion de la surface terrestre appropriée par un groupe et l'appropriation d'une surface par une collectivité passe nécessairement par le contrôle de mobilité dans le territoire et par la mise en place de liens permanents entre les lieux (Pumain et St-Julien, 2010).

D'un point de vue mathématique, un réseau est défini comme un graphe, c'est-à-dire comme un ensemble de sommets et d'arcs. L'analyse de graphe est longtemps restée descriptive et n'a pas abouti à l'élaboration de modèles. On distinguait seulement les graphes planaires (ces graphes ont la particularité de pouvoir se représenter sur un plan sans qu'aucun arc n'en croise un autre) et non planaires. On distinguait aussi des structures régulières (chaque sommet est relié à un même nombre d'arcs) et aléatoires (chaque sommet est relié de manière aléatoire à un certain nombre d'arcs). Ces types de graphes étaient alors trop pauvres pour constituer de véritables modèles d'analyse spatiale. Néanmoins, ces dernières années des modèles théoriques de graphes sont apparus. Ils constituent désormais de véritables modèles d'analyse spatiale (en particulier les modèles *small-world* et *scale-free*).

Le concept de *small-world* est issu des travaux de Stanley Milgram dans les années 1960. L'expérience consistait à demander à des habitants du Middle West de faire parvenir une lettre à un destinataire de la Côte Ouest en utilisant comme intermédiaire des personnes qu'ils appelaient par leur prénom. Milgram eu la surprise de constater que la moyenne des chaînes parvenues au destinataire n'était que de 5.6. Cette expérience a donné lieu à un

mythe devenu dans sa version populaire les six degrés de séparation. Autrement dit, seules cinq personnes nous séparent de n'importe quelle autre personne dans le monde.

En 1998 Watts et Strogatz publièrent un article dans *Nature* où ils proposèrent un modèle de graphes petit-monde (*small-world network*) qui diffère du modèle dominant utilisé auparavant (graphe aléatoire). Plus précisément, un *small-world network* est un réseau où le degré de *clustering* est élevé (beaucoup de sous-graphes sont fortement connexes – il y a une forte transivité du graphe – c'est-à-dire que les sommets voisins sont très connectés entre eux, ainsi si les sommets A et B sont liés, tout comme les sommets B et C, alors la probabilité est forte pour que les sommets A et C soient reliés) et où la distance moyenne entre les paires de sommets est faible.

Le principe de construction de ce graphe est simple, le graphe de départ est k-régulier (tous les sommets ont le même degré) et chaque sommet est lié à ses voisins proches. De façon aléatoire, un lien est supprimé et un lien est ajouté au graphe de départ. Les auteurs mesurent alors deux paramètres : la moyenne des plus courts chemins entre chaque paire de sommets et le *clustering coefficient*. Ce processus aboutit à un réseau parfaitement aléatoire. Entre le réseau régulier de départ et le réseau aléatoire final se trouvent les réseaux dits « *small-world* ». Durant ce processus, la moyenne des plus courts chemins et le niveau de *clustering* diminuent, mais comme la moyenne des plus courts chemins diminue plus « rapidement », certains réseaux présentent un niveau de *clustering* élevé et une moyenne faible des plus courts chemins. Ce sont les réseaux *small-world*.

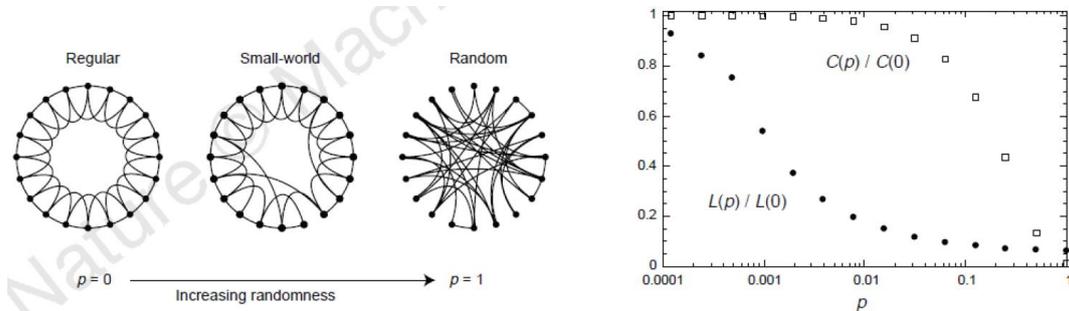


Figure 7 : Principes d'un réseau *small-world* (Watts et Strogatz, 1998).

Moins d'un an plus tard, deux physiciens, Barabási et Albert, publient dans *Science* un article où ils proposent un autre modèle de graphes : les *scale-free networks*. En effet, en étudiant, de manière empirique, différents graphes existant dans la nature, ils aboutirent à une conclusion qui leur apparut alors surprenante : contrairement à ce qui était communément admis, les graphes qu'ils étudient ne présentent pas une distribution gaussienne des degrés, mais au contraire des distributions qui suivent des lois de puissance [13]. Ainsi, il existe un grand nombre de sommets reliés à d'autres sommets par un nombre faible de liens. En revanche, il existe peu de sommets reliés directement à un grand nombre de sommets (Figure 8).

$$P(k) \sim k^{-\gamma} \sim \frac{1}{k^\gamma} \quad [13]$$

où k est le degré des sommets, $P(k)$ la fréquence des sommets de degrés k , γ est supérieur à 2.

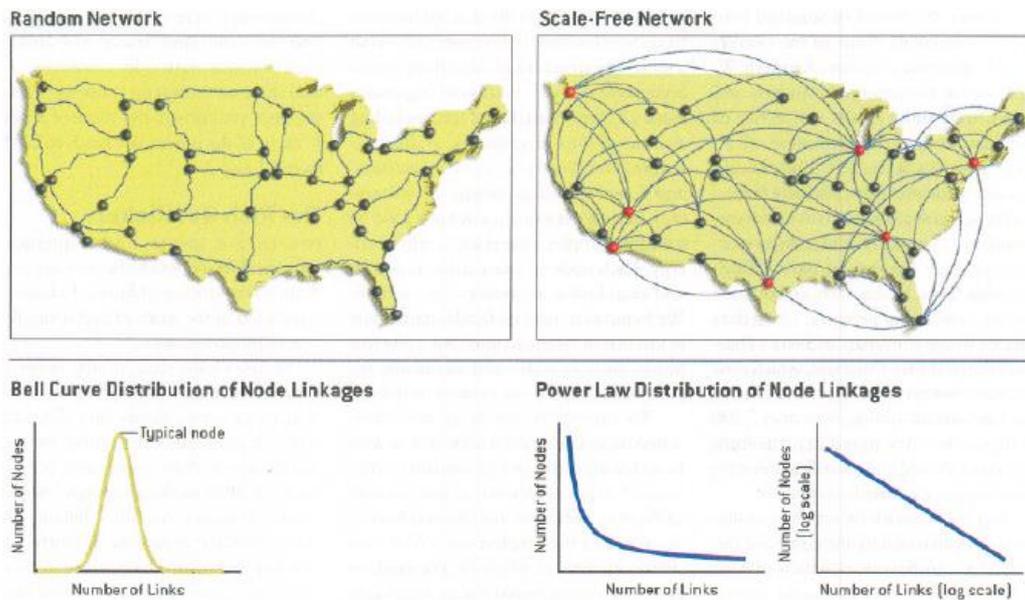


Figure 8 : Les principes d'un réseau *scale-free* (Barabási et Albert, 1999).

Pour expliquer cette distribution très inégalitaire des degrés, les auteurs émettent et testent des hypothèses concernant la formation et l'évolution des réseaux. Les graphes étudiés mettent en évidence des liens qui suivent apparemment un processus d'attachement préférentiel (*preferential attachment*).

En une décennie, les notions de *small-world* et de *scale-free* sont devenues très répandues. Ainsi, il apparaît que de nombreux réseaux géographiques (ou spatiaux) présentent ces caractéristiques (comme ceux des multinationales, des collaborations scientifiques, du réseau aérien chinois ou des réseaux Internet). C'est pour cela qu'ils sont présentés dans ce complément de cours comme des modèles appartenant à l'analyse spatiale. Néanmoins, les réseaux qui nécessitent de grosses infrastructures matérielles linéaires, comme les réseaux techniques (réseau électrique, réseau viaire, réseau d'eau...), ne présentent pas souvent ces caractéristiques. Ainsi, la mise à l'épreuve de ces modèles peut permettre de mettre en évidence des contraintes territoriales qui impose des distributions binomiales des degrés.

Trouver un exemple très simple permettant d'appliquer ces modèles n'est pas chose aisée. En effet, si ces modèles ne sont pas très complexes (seules quelques bases en théorie des graphes sont nécessaires pour les comprendre), les graphes concernés par ces modèles se doivent d'être « grands » (ces graphes doivent comporter un nombre de sommets supérieur à plusieurs centaines). Or, il n'est pas aisé de manipuler de « grands » graphes. C'est d'ailleurs pourquoi ces modèles de graphes théoriques (bien que simples) ont émergé récemment, puisqu'il fallait disposer de moyens informatiques modernes pour les découvrir et les implémenter. Pour donner un exemple qui ait du sens, il apparaît dès lors nécessaire d'avoir recours à des outils informatiques. Nous allons ici utiliser « R », un logiciel conçu pour faire

de l'analyse statistique³. De surcroît, il faut de surcroît télécharger un package nommé « IGraph » pour effectuer de l'analyse de graphe avec « R ». En ce qui concerne les données, il est possible d'utiliser celles fournies par Newman (<http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/>). Plus précisément, nous allons étudier la structure d'internet.

Après avoir ouvert R, il faut appeler le package IGraph :

```
> library(igraph)
```

Puis, il faut charger le jeu de données GML dans R. Par exemple, si vous avez placé votre jeu de données (« dézippé ») sur le bureau, il faut taper une ligne de code de ce type :

```
> donnees <- read.graph("C:/Users/xxxxxx/Desktop/as-22july06/as-22july06.gml", "gml")
```

Il est dès lors très simple de calculer la distribution des degrés:

```
> dd=degree.distribution(donnees, cumulative = FALSE)
```

Cette distribution peut être représentée dans un diagramme « log-log ». Ce diagramme laisse entrevoir un comportement *scale-free*, puisque (mis à part pour les valeurs supérieures) la distribution des degrés semble diminuer en suivant une droite (Figure 9) :

```
> plot(dd, log = "xy", ylab="distribution degres", xlab="degres")
```

Pour le vérifier, il faut déterminer la valeur du coefficient γ . Pour cela, il faut disposer de données qui font abstraction des valeurs nulles (celles-ci vont en effet gêner la détermination du coefficient γ). De même, il faut récupérer les valeurs des degrés.

```
> dd[dd==0]<-NA
> sup<-which(is.na(dd))
> dd2<-dd[!is.na(dd)]
> id<--1:length(dd)
> id2<-id[-sup]-1
```

Dès lors, il est possible de calculer la valeur du coefficient γ (Figure 11) à l'aide d'une régression linéaire (voir page 56), puis d'afficher les résultats dans un graphique (Figure 10) :

```
> summary(lm(log(dd2)~log(id2)))
> plot(log(id2),log(dd2), ylab="Log du de la distribution des degres",
xlab="Log des degres")
> abline(lm(log(dd2)~log(id2)))
```

Ainsi, les résultats de la régression sont approximatifs ($R^2=73\%$). De surcroît, le coefficient γ est égal à 1.15. Ce coefficient est donc inférieur à deux, ce qui place le graphe de la « structure d'internet » dans un « cas limite » de *scale-free*. Cela s'explique par une

³ Pour une introduction au fonctionnement de ce logiciel, qui peut surprendre ceux qui nous pas l'habitude de travailler avec des lignes de commandes, vous pouvez trouver des initiations sur internet, comme par exemple sur le site : <http://elementr.parisgeo.cnrs.fr>

surreprésentation des valeurs extrêmes (en l'occurrence les valeurs les plus fortes). En revanche, si l'on utilise la distribution cumulée des degrés, la loi de puissance apparaît plus évidente (Figure 12).

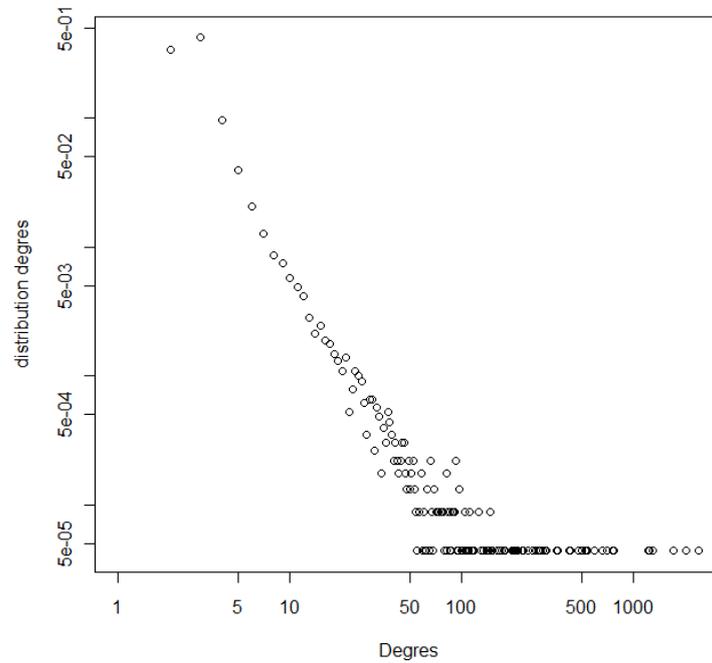


Figure 9 : La distribution des degrés de la structure d'internet dans un diagramme log-log.

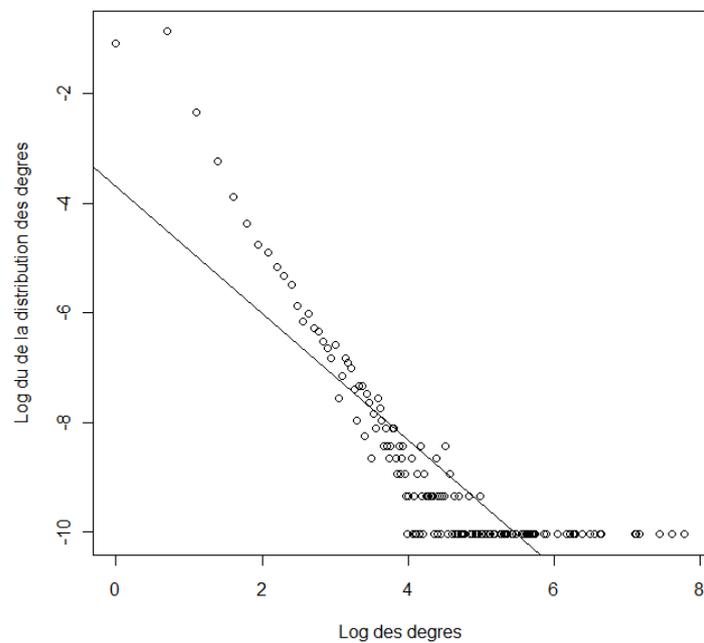


Figure 10 : La distribution des degrés et la représentation de la droite de régression.

```

Call:
lm(formula = log(dd2) ~ log(id2))

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.7381 -0.6367 -0.1734  0.4598  3.6312

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -3.69155    0.25785  -14.32  <2e-16 ***
log(id2)     -1.15617    0.05529  -20.91  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.9399 on 159 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7334,    Adjusted R-squared:  0.7317
F-statistic: 437.3 on 1 and 159 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Figure 11 : Les résultats de la régression linéaire.

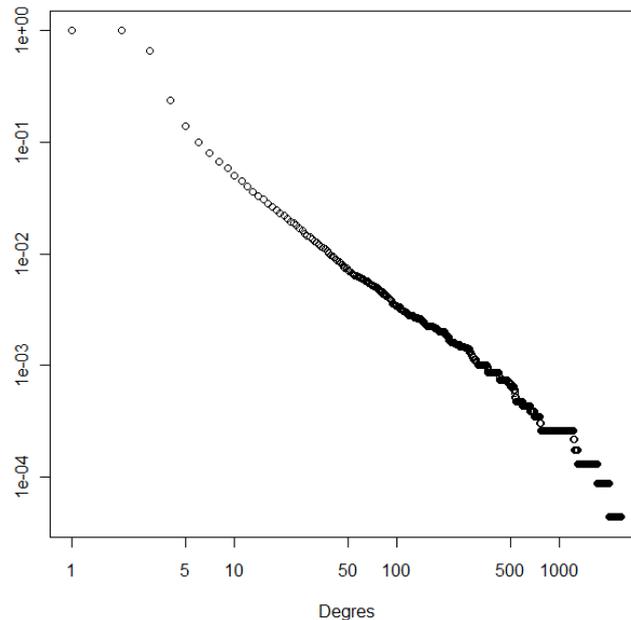


Figure 12 : La distribution cumulée des degrés de la structure d'internet dans un diagramme log-log.

Les modèles d'optimisation : de Von Thünen aux modèles de localisation-allocation

Derrière la très riche variété des paysages concrets que nous observons à la surface du globe, il existe des organisations structurantes résultant du désir des habitants ou de leurs dirigeants d'aménager le sol pour leur plus grande commodité (Pumain et St-Julien, 2010). Ce processus d'adaptation à un milieu donné peut s'apparenter à un principe d'optimisation. En effet, les sociétés cherchent très souvent à maximiser une fonction d'utilité qui varie en fonction des lieux et des périodes. Cette fonction d'utilité peut être purement économique (maximisation économique de l'utilisation du sol) ou plus complexe (maximisation du bien-être individuel ou social). Ainsi, il n'est pas si surprenant qu'un des premiers modèles

d'analyse spatiale, le modèle de « Von Thünen », repose sur un principe de maximisation : celui de la maximisation des rentes foncières.

Dans la vie courante, le choix de son lieu de résidence varie en fonction des capacités financières de chacun, mais certains critères semblent partagés par de nombreuses personnes. Or, certains de ces critères font clairement référence à des critères d'optimisation qui peuvent s'exprimer simplement : minimisation du temps de trajet à son lieu de travail en fonction d'une maximisation des accès à certaines aménités (commerces, espaces verts, liens sociaux...). Ainsi, l'optimisation, si elle ne doit pas être systématiquement recherchée, peut servir de modèle de référence afin de mettre en exergue les singularités des territoires.

➤ Le modèle de Von Thünen

Von Thünen dans son ouvrage *Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie* (1826) se donne comme objectif d'expliquer la localisation des activités agricoles. Selon lui, les activités agricoles ne sont pas disposées de manière aléatoire dans l'espace, mais répondent à une distribution spécifique. Dans sa théorie, Von Thünen est parti de l'idée développée par Adam Smith, selon laquelle le producteur cherche à maximiser le profit de sa terre. Von Thünen, lui-même propriétaire terrien, savait qu'un tel profit repose sur l'utilisation optimale des surfaces et des coûts de transport. En se concentrant sur ces deux variables, il obtient un État isolé homogène avec une « ville-marché » en son centre. Von Thünen conclut qu'une denrée ne vaut la peine d'être produite que si elle se trouve à une certaine distance du marché. En dehors de cette distance, le coût de la terre (rente foncière) ou le coût de transport devient trop élevé, une autre culture devient alors plus rentable. Von Thünen ayant calculé les coûts de transport par des distances à vol d'oiseau du marché, les zones ainsi définies sont circulaires : on parle des anneaux de Von Thünen.

Plus précisément, le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- Le marché est situé au centre d'un « Etat isolé » ou plus généralement d'un territoire isolé ;
- L'État isolé est entouré d'étendues sauvages ;
- Le pays est plat, sans rivière ni montagne ;
- Les qualités du sol et du climat sont homogènes ;
- Les producteurs apportent directement leurs produits aux marchés par le chemin le plus court (il n'y a pas de routes et tout le transport se fait à vol d'oiseau...);
- Les producteurs se comportent de manière à maximiser leur profit.

A partir de cette situation, on pose :

- R_i = la rente foncière : $R_i(d) = r(p_i - c_i) - r \times T_i \times d$;
- r = le rendement par unité de surface ;
- p_i = le prix du marché par unité de produit ;
- c_i = les charges de fabrication par unité de produit ;

- T_i = le coût du transport, en unité de compte par unité de produit et par unité de distance ;
- d = la distance au marché.

Pour un même rendement unitaire de surface, on obtient l'équation suivante : $R_i(d) = (p_i - c_i) - T_i \times d$. Ainsi, pour chaque produit, la rente est représentée par une droite décroissante de pente $-T_i$ dont l'ordonnée à l'origine est égale à $(p_i - c_i)$. Une production n'est plus rentable (c'est-à-dire $R_i(d_{\max})=0$) au point d'abscisse $d_{\max} = (p_i - c_i) / T_i$. Comme, la surface est dédiée à la culture du produit qui offre la rente la plus élevée aux propriétaires fonciers, la configuration des différentes cultures suit bien une forme de cercles concentriques (Figure 13). Sur la figure ci-dessous, la première parcelle sera affectée au produit a, la seconde, un peu éloignée du centre au produit b et la dernière encore un peu plus distante du marché au produit c.

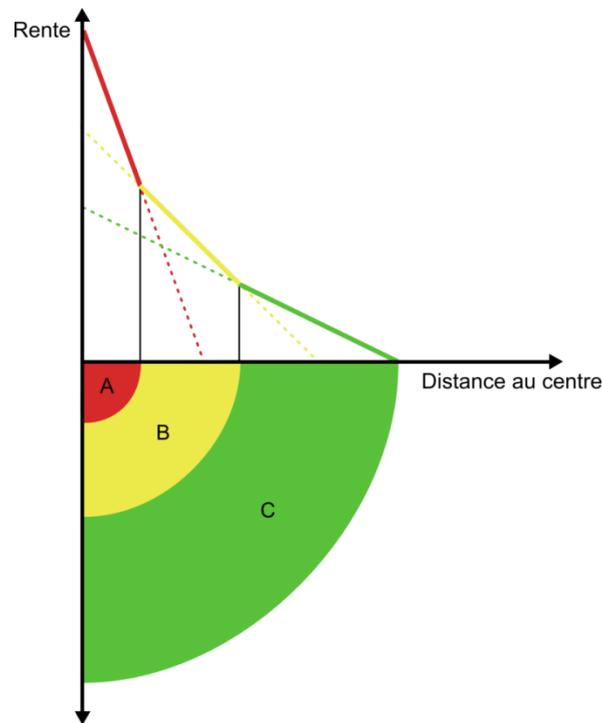


Figure 13 : Localisation de trois cultures dans le cadre du modèle de Von Thünen.

A titre d'exemple, en partant des données ci-dessous :

	Cultures maraîchères	Maïs	Elevage
Prix de vente (P_i)	3000	1000	1500
Coûts de production (C_i)	1800	660	850
Coûts de transport au km (T_i)	25	1.5	4

Tableau 13 : Les données concernant trois productions agricoles différentes.

On obtient les résultats intermédiaires qui suivent :

	Cultures maraîchères	Maïs	Elevage
Bénéfice brut (ordonnée à l'origine : $p_i - c_i$)	$3000-1800=1200$	$1000-660=340$	$1500-850=650$
Distance max de rentabilité $((P_i-C_i)/T_i)$	$1200/25=48$	$340 / 1.5 = 227$	$640/4=160$
Pente de la rente $(-T_i)$	- 25	- 1.5	- 4

Tableau 14 : Calculs intermédiaires au modèle de Von Thünen.

Dès lors, on peut calculer les distances au centre pour lesquels les revenus nets entre deux productions i et j sont égaux (Tableau 15). Par exemple, pour les cultures maraîchères et le maïs, on cherche à résoudre l'équation suivante :

$$(P_i - C_i) - T_i \times x = (P_j - C_j) - T_j \times x$$

$$1200 - 25x = 340 - 1.5x$$

$$1200 - 340 = 25x - 1.5x$$

$$860 = 23.5x$$

$$860/23.5 = x$$

$$x = 36,59$$

	Cultures maraîchères	Maïs	Elevage
Cultures maraîchères	-	37	26
Maïs	37	-	124
Elevage	26	124	-

Tableau 15 : Distances au centre pour lesquels les revenus nets entre deux productions i et j sont égaux.

Pour résumer et visualiser les résultats, il est possible de produire un schéma (Figure 14). Enfin, il est important de noter que le modèle de Von Thünen peut s'appliquer aux espaces urbains. Ainsi, dans le modèle d'Alonso, au sein des villes, tout s'organise en fonction du centre-ville et du coût de transport. La localisation des ménages s'effectue dès lors selon les ressources de ces ménages et la distance au centre-ville. L'affectation du sol urbain rappelle alors le modèle de Von Thünen. Néanmoins, les limites de ces modèles sont nombreuses. Elles résident dans les hypothèses fondatrices de ces modèles : à savoir l'isotropie spatiale, la liberté de déplacement, la concurrence parfaite, la présence d'un centre unique autour duquel

s'ordonne la ville, la centralité du coût de transport dans l'allocation spatiale, la rationalité des comportements...

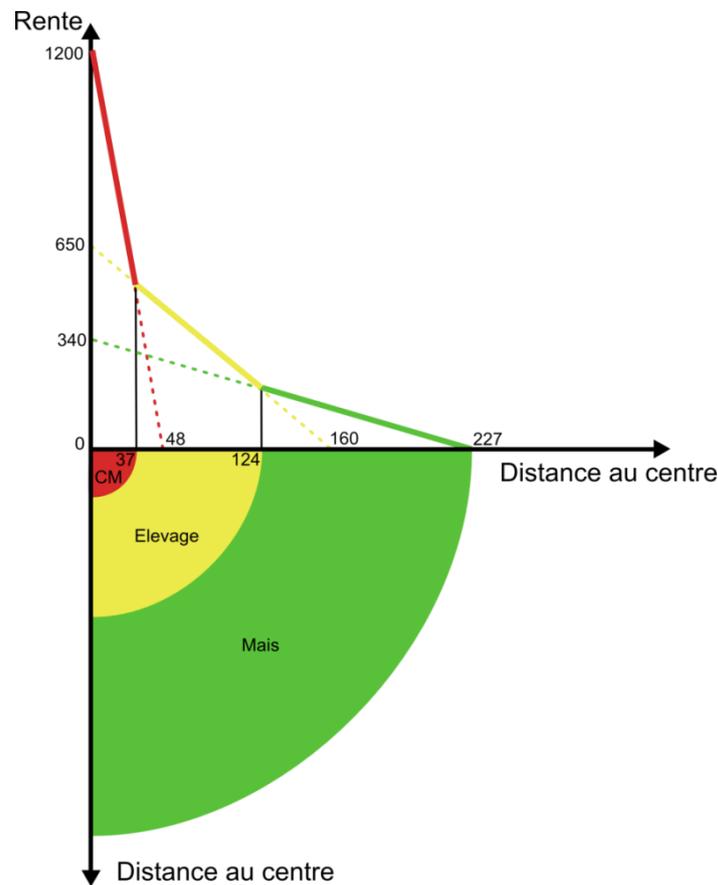


Figure 14 : Traduction graphique des calculs effectués.

Enfin, il est important de noter que le modèle de Von Thünen peut s'appliquer aux espaces urbains. Ainsi, dans le modèle d'Alonso, au sein des villes, tout s'organise en fonction du centre-ville et du coût de transport. La localisation des ménages s'effectue dès lors selon les ressources de ces ménages et la distance au centre-ville. L'affectation du sol urbain rappelle alors le modèle de Von Thünen. Néanmoins, les limites de ces modèles sont nombreuses. Elles résident dans les hypothèses fondatrices de ces modèles : à savoir l'isotropie spatiale, la liberté de déplacement, la concurrence parfaite, la présence d'un centre unique autour duquel s'ordonne la ville, la centralité du coût de transport dans l'allocation spatiale, la rationalité des comportements...

➤ Les modèles de localisation-allocation (ou localisation-affectation)

Pour un large éventail d'entreprises privées et publiques, la « bonne » localisation de leurs différentes installations (points de vente, bureaux, entrepôts...) représente un enjeu de planification crucial. L'objectif des modèles de localisation-allocation est précisément d'optimiser la localisation de ces installations (par exemple des points de vente) en tenant de l'allocation (l'affectation) des ressources ou des clients (afin de déterminer par exemple la

capacité d'offre de différents points de ventes). Néanmoins, il ne faut pas limiter la portée de ces modèles aux seules entreprises qu'elles soient publiques ou privées. En effet, si ces modèles font partie des fondements du géomarketing, il ne faut pas oublier que les individus peuvent très bien agir en suivant des comportements d'optimisation (comme par exemple dans leur mode de déplacement, en choisissant les chemins les plus courts pour aller d'un lieu à un autre).

Ces modèles trouveraient leur origine dans des travaux comme ceux d'Alfred Weber. Alfred Weber cherchait alors à localiser un centre de production de manière à minimiser la distance pondérée entre ce centre et les sources de matières premières : c'est le problème p-median. Dans les faits, le problème p-médian (un problème particulier de localisation-allocation) est beaucoup plus ancien, puisqu'il remonte à Pierre de Fermat (1601-1665) qui posa le problème suivant : étant donné trois points dans un plan, trouver un quatrième point dont la somme des distances aux trois points donnés est minimum (la distance entre deux points étant mesurée par la longueur du segment les joignant). Cependant, Alfred Weber posa le problème sous sa forme moderne. Désormais, chaque modèle de localisation-allocation contient cinq composants essentiels :

- **la fonction objective** : elle tient compte de la distance séparant les « points de demande » des « emplacements potentiels ».
- **les points de demande** : ils représentent le niveau de la demande pour un certain type de produits (ou de services) à l'échelle d'une ville ou d'un quartier. En règle générale, ce sont des clients.
- **les emplacements potentiels** : ce sont les emplacements envisageables pour les installations à implanter (points de vente, points de distribution, dépôts...).
- **la matrice d'éloignement ou de temps** : Cette matrice regroupe toutes les distances (kilométriques ou temporelles selon l'étude considérée) séparant les emplacements potentiels des différents points de demande.
- **la règle d'allocation** : dans un cas simple, il est possible de considérer que les clients seront desservis en priorité par les installations les moins éloignées de chez eux. La règle d'allocation choisie est alors la proximité géographique. Il est cependant possible d'envisager des règles d'allocation plus complexes.

A partir de cette formulation, les modèles de localisation-affectation sont nombreux. Ainsi, le modèle de couverture maximale a pour but de maximiser « la demande potentielle » (souvent le nombre de clients, de consommateurs) en restant à une distance inférieure à une certaine limite. Ce type de modèle est, par exemple, utilisé pour les services publics (Trésor Public, Transport public, Mairie, Services Postiers...). Le modèle « p-centré » vise quant à lui à minimiser la distance maximale entre les clients et le service considéré. Ce modèle est utilisé

pour déterminer des emplacements de services d'urgence, tels que des localisations d'ambulances, d'hôpitaux, ou de casernes de pompiers.

Le choix d'un modèle dépend donc de la formulation du problème considéré. Une formulation fréquemment utilisée est celle du problème p-médian. Le problème p-médian consiste à trouver la configuration géographique des unités d'offre de manière à minimiser la somme des distances parcourues sous une série de contraintes énoncées par l'utilisateur. Le modèle assure, en quelque sorte, la couverture efficace (voire équitable) du milieu. Pour résoudre ce problème, il faut avoir recours à des algorithmes heuristiques. Un des algorithmes les plus simples est l'algorithme flou (*Fuzzy algorithm or Greedy algorithm*). Cet algorithme se formalise comme suit : on se donne un graphe $G = (V, E)$ dont les sommets $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ sont les n points représentant les points de demande potentiels. On nomme E l'ensemble des arrêtes de ce graphe. On note alors :

- $d(i,j)$: la longueur du plus court chemin entre V_i et V_j
- w_j : la demande potentielle au point V_j

Le problème p-médian consiste à localiser p installations pour couvrir la demande de tous les sommets de façon optimale. En d'autres termes, cela revient à minimiser la distance entre chaque site de demande et le centre le plus proche. On note alors :

- $y_i = 1$ si une installation est placée au point V_i et $y_i = 0$ sinon
- x_{ij} = la demande en V_j couvert par l'installation placée en V_i (on considère que chaque composant peut être couvert par plusieurs installations).

Le but est ainsi de calculer :

$$\text{Min}[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \times d(i,j)] \quad [14]$$

Et les contraintes sont respectivement les suivantes [15] [16] [17]:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = w_j, 1 \leq j \leq n, \\ 0 \leq x_{ij} \leq w_j, 1 \leq i, j \leq n \\ \sum_{i=1}^n y_i = p, y_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

- L'équation [15] assure qu'en tout sommet V_j , la somme des besoins couverts par les installations placées en V_i correspond bien au besoin total w_j du sommet V_j .
- L'inéquation [16] impose que la demande couverte par V_i pour le sommet V_j ne dépasse pas la demande totale w_j et dépend bien de la présence ou non d'une installation en V_i .
- L'équation [17] impose qu'il y ait exactement p installations placées sur le réseau.

Si les techniques pour résoudre ce système sont généralement assez complexes et lourdes à mettre en œuvre, le principe de l'algorithme flou est en revanche assez simple : localiser les installations une par une, en choisissant à chaque fois la solution optimale. Autrement dit, on espère obtenir un optimum global à partir d'optimums locaux (c'est un algorithme glouton). Ainsi, l'algorithme détermine, dans un premier temps, le meilleur emplacement pour la première installation en calculant la fonction objective pour chaque nœud envisagé (l'algorithme retient alors simplement le nœud pour lequel la fonction objective est la plus faible). Ensuite, l'algorithme détermine un deuxième site en calculant de nouveau pour chaque nœud la fonction objective (sauf pour celui déjà occupé) et assigne au site déterminé précédemment les nœuds qui lui sont les plus proches (ces nœuds n'interviennent alors plus dans la détermination du nouveau site). De nouveau, l'algorithme retient le nœud pour lequel la fonction objective est la plus faible. Cette opération est répétée à plusieurs reprises afin de déterminer les localisations des p installations souhaitées. Pour appliquer cet algorithme, plusieurs hypothèses doivent être faites :

- Il n'y a pas de limite de capacité pour un site. C'est-à-dire que lorsqu'un site est placé, il peut subvenir à l'ensemble des besoins des autres nœuds dont il doit s'occuper (les nœuds situés le plus près de lui).
- Le besoin d'un nœud est totalement satisfait par le site situé le plus près de lui, peu importe combien de nœuds celui-ci doit gérer et peu importe les besoins de ces autres nœuds.
- Le besoin des différents nœuds est fixe et ne fluctue pas en fonction du temps.

Nous allons détailler cet algorithme à l'aide d'un exemple didactique. Prenons la carte des clients potentiels d'une entreprise (Figure 15). Ces clients sont regroupés au sein de 12 villes (de A à L).

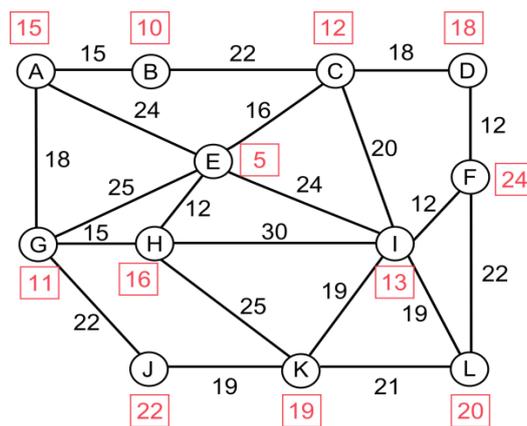


Figure 15 : Carte des clients potentiels d'une entreprise. Les lettres représentent le nom des villes. Les nombres rouges correspondent aux nombres de clients potentiels de chaque ville. Les chiffres noirs correspondent aux distances.

On cherche à positionner 5 points de vente (parmi toutes les villes où se trouvent les clients potentiels) afin de minimiser les distances parcourues par l'ensemble des clients pour se rendre à ces 5 points de ventes. Pour cela, il faut dans un premier temps calculer la matrice des distances entre les différentes villes (Tableau 16).

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	15	37	55	24	60	18	33	48	40	58	67
B	15	0	22	40	38	52	33	48	42	55	61	61
C	37	22	0	18	16	30	41	28	20	58	39	39
D	55	40	18	0	34	12	59	46	24	62	43	34
E	24	38	16	34	0	36	25	12	24	47	37	43
F	60	52	30	12	36	0	57	42	12	50	31	22
G	18	33	41	59	25	57	0	15	45	22	40	61
H	33	48	28	46	12	42	15	0	30	27	25	46
I	48	42	20	24	24	12	45	30	0	38	19	19
J	40	55	58	62	47	50	22	37	38	0	19	40
K	58	61	39	43	37	31	40	25	19	19	0	21
L	67	61	39	34	43	22	61	46	19	40	21	0

Tableau 16 : Matrice des distances entre les différentes villes.

Comme on cherche à minimiser les parcours de l'ensemble des clients, il est nécessaire de cumuler tous ces parcours. Pour cela, il faut multiplier la distance séparant la ville et le site potentiel par le nombre de clients potentiels de la ville (Tableau 17). Par exemple, il y a 15 km à parcourir pour les 15 clients de la ville A pouvant se rendre au site potentiel B, soit un coût total de : $15 \times 15 = 225$. De même, il y a 15 km à parcourir pour les 10 clients de la ville B pouvant se rendre au site potentiel A, soit un coût total de : $15 \times 10 = 150$.

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	441	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

Tableau 17 : Matrice des coûts totaux.

Ensuite, l'algorithme flou calcule la somme des coûts totaux pour l'ensemble des sites qui sont susceptibles d'accueillir les points de vente. Le site qui a la somme des coûts totaux la plus faible est sélectionné pour accueillir un premier point de vente.

Ville	Site potentiel											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	451	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0
Total	7816	7913	5855	6457	5784	5760	6936	5971	4772	6886	5576	6371

Tableau 18 : Résultats de la première itération de l'algorithme flou. La ville I accueillera donc le premier point de vente.

Dans notre exemple, l'algorithme flou place le premier point de vente dans la ville I. L'algorithme effectue ensuite le même calcul en tenant compte cette fois-ci de la position du premier point de vente. Par exemple, si la distance de $A \rightarrow B$ est supérieure à celle de $A \rightarrow I$ alors $D(A,B) = D(A,I)$. En effet, si $D(A,B) > D(A,I)$, les clients de la ville A se rendront en I et ne chercheront pas à aller en B. Il ne faut donc pas pénaliser le site B, alors que les clients de la ville A ne s'y rendront pas. On obtient alors une nouvelle matrice de coûts.

Ville	Site potentiel											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	720	360	720	270	495	720	600	720	720
B	150	0	220	400	380	420	330	420	420	420	420	420
C	240	240	0	216	192	240	240	240	240	240	240	240
D	432	432	324	0	432	216	432	432	432	432	432	432
E	120	120	80	120	0	120	120	60	120	120	120	120
F	288	288	288	288	288	0	288	288	288	288	288	288
G	198	363	451	495	275	495	0	165	495	242	440	495
H	480	480	448	480	192	480	240	0	480	480	400	480
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	836	836	836	836	836	836	484	814	836	0	418	836
K	361	361	361	361	361	361	361	361	361	361	0	381
L	380	380	380	380	380	380	380	380	380	380	380	0
Total	3485	3725	3943	4296	3696	4268	3145	3655	4772	3563	3858	4392

Tableau 19 : Résultats de la deuxième itération de l'algorithme flou. La ville G accueillera le deuxième point de vente.

L'algorithme place donc un autre point de vente dans la ville G. En repétant la même opération trois fois, l'algorithme produit la liste des points de vente qui suit :

Numéro du point de ventes	Site	Coût total
1	I	4772
2	G	3145
3	F	2641
4	J	2157
5	A	1707

Tableau 20 : Résultats finaux de l'algorithme flou.

Il est alors possible de réaliser la carte des implantations des points de vente avec l'affectation des clients associés :

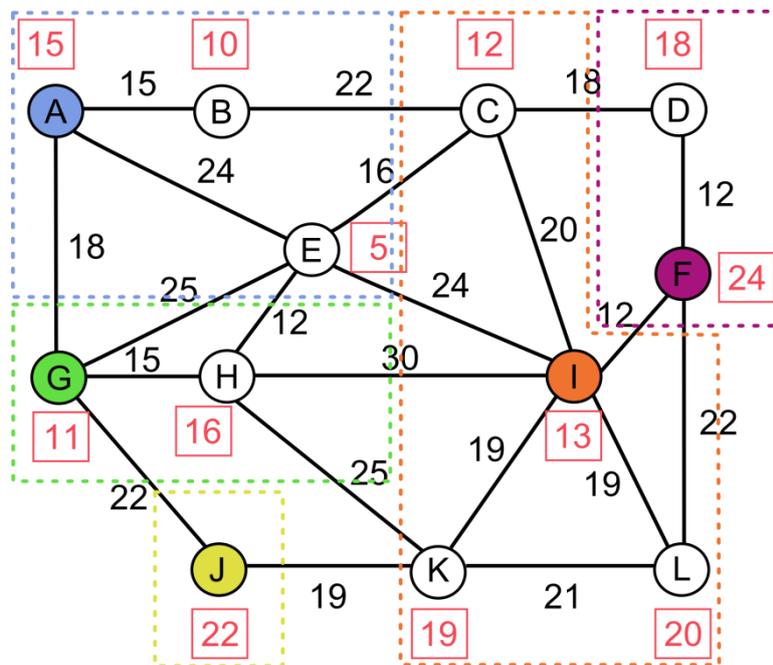


Figure 16 : Carte des points de vente déterminés à l'aide de l'algorithme flou.

Les modèles de dynamique spatiales : les modèles d'Hägerstrand et de Schelling

L'ensemble des modèles présentés jusqu'ici était statique. Si certains de ces modèles peuvent éventuellement être utilisés pour simuler (prédire) certaines évolutions (le modèle gravitaire permet par exemple de prédire les flux de déplacement domicile-travail en fonction des poids des lieux étudiés), ils ne sont pas pour autant dynamiques. Ainsi, il n'y a pas dans ces modèles de variable t représentant le temps. Or, paradoxalement, les processus étudiés en géographie sont en règle générale dynamiques. La seule étude des variations obtenues en faisant évoluer les paramètres d'entrée d'un modèle (technique qui permet notamment de

reproduire un processus (temporel) à partir d'un modèle statique), ne peut avoir la même portée qu'un modèle par essence dynamique. Il faut bien avouer que la mise en place de modèles mathématiques dynamiques n'est pas chose aisée. Dans les faits, la modélisation informatique se prête mieux à cet exercice. Ainsi, si des modèles de simulation existent en géographie depuis le début des années 1950, le développement de l'informatique a permis une diffusion plus large de ces modèles en facilitant leur implémentation. Deux grands classiques de l'analyse spatiale vont être présentés dans ce complément de cours : le modèle d'Hägerstrand et le modèle de Schelling.

➤ **Les modèles de diffusion spatiale (et individus centrés): le modèle de diffusion spatiale de l'innovation d'Hägerstrand**

La diffusion s'exprime par tous les déplacements qui, quelle qu'en soit la force motrice, cherchent à répandre quelque chose de manière homogène dans un système, tendant ainsi à le faire passer d'un état d'équilibre à un autre état d'équilibre. Ainsi, la notion de diffusion est introduite quand on étudie des processus qui mettent en jeu des déplacements de produits, de personnes, de pratiques... Plus précisément, la notion de diffusion spatiale recouvre l'ensemble des processus qui concourent aux déplacements dans l'espace géographique et aux effets que ces déplacements engendrent dans cet espace. La diffusion peut alors correspondre à un mouvement de migration avec relocalisation ou à un mouvement d'expansion (de contagion).

Depuis les travaux d'Hägerstrand, les géographes insistent sur le rôle que peuvent avoir les structures spatiales (effets de voisinage, de barrière, de hiérarchie...) sur les processus spatio-temporels de toute diffusion. En matière d'analyse spatiale, on identifie ainsi deux types de mouvements d'expansion dans l'espace. D'une part, la diffusion par contagion qui repose sur les effets à la fois de la distance et de la contiguïté dans un processus de diffusion spatiale. Une innovation ou une nouvelle activité aura tendance à se diffuser dans les voisinages immédiats de son lieu d'apparition. D'autre part, la diffusion hiérarchique rend compte de la propagation d'une activité selon la hiérarchie des lieux. L'innovation se propage en priorité à travers les espaces à fort potentiel d'interaction, privilégiant ainsi les grands centres économiques et décisionnels, et se poursuit à travers des espaces de moins en moins denses à mesure que l'innovation se « banalise ». Dans ce contexte, la taille et le rang d'une ville dans un réseau urbain sont les critères déterminants du processus de diffusion.

Dans le cadre de son travail de thèse portant sur la diffusion des innovations techniques agricoles dans le centre de la Suède, Hägerstrand est le premier à appliquer et à développer des méthodes mathématiques permettant de décrypter des régularités temporelles et spatiales dans les mouvements humains. Cette thèse, publiée en 1953, devient une référence mondiale après sa traduction en anglais (*Innovation Diffusion as a Spatial Process*). La proposition originale de ce travail est le modèle de simulation de la diffusion des innovations par vagues fondé sur une approche probabiliste des mises en contact entre « émetteurs » et « récepteurs ». Ce modèle est implémenté par une procédure Monte Carlo. Aujourd'hui encore, les principes fondamentaux de ce modèle sont considérés comme très pertinents.

Torsten Hägerstrand propose donc le premier modèle de diffusion des innovations fondé sur des mécanismes de contact entre individus. L'idée fondamentale de ce modèle est que si ces interactions sont stables et persistantes dans l'espace et dans le temps, alors leur reconnaissance et leur formalisation doivent permettre de décrire correctement toute diffusion dans l'espace géographique que ce soit à une échelle macroscopique, où la diffusion s'effectue en priorité selon la hiérarchie des lieux, ou à une échelle microscopique, la contiguïté spatiale étant alors privilégiée. Plus précisément, les individus sont classés en (au moins) deux groupes : les informés et les autres. Chaque individu informé peut, par la suite, adopter l'innovation. L'individu réagit par stimulations : il peut passer de l'état d'individu non informé à celui d'individu adoptant, avec un état transitoire d'individu informé se faisant une représentation de l'innovation par rapport à ses propres besoins. Cette dynamique peut être modélisée par de méthodes probabilistes. Depuis les travaux d'Hägerstrand, de nombreux autres modèles ont vu le jour. Dans ces modèles, de manière générale, les informés ou les adoptants contribuent à diffuser des informations concernant l'innovation : ils font, en quelque sorte, de la publicité (involontaire ou non) pour l'innovation. De surcroît, en fonction des modèles, les adoptants pourront se montrer plus ou moins exigeants.

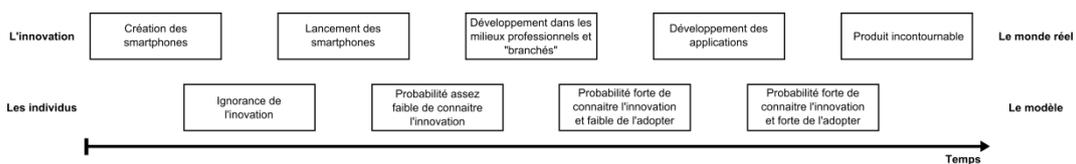


Figure 17 : Schéma du principe des modèles de diffusion fondés sur les travaux d'Hägerstrand.

Dans sa thèse, Eric Daudé détaille bien les principes de fonctionnement des modèles de diffusion d'Hägerstrand. En effet, Hägerstrand construit trois modèles, dont la présentation constitue une introduction didactique à son modèle final (le troisième modèle qui est reconnu comme étant le modèle d'Hägerstrand), puisque ces modèles vont du plus simple au plus complexe. Premièrement, Hägerstrand imagine que tous les individus sont informés en même temps de l'innovation. Les individus adoptent alors l'innovation de manière totalement aléatoire. Le territoire est découpé en une grille de 81 cellules (de 5km de côté) comportant chacune 30 individus. A chaque itération, un individu est choisi de manière totalement aléatoire pour adopter l'innovation et cela n'a pas d'incidence sur l'adoption par ces voisins. Avec ce modèle simple, on obtient finalement une diffusion totalement aléatoire de l'innovation au sein du territoire (Figure 18). Dans le deuxième modèle, un seul individu est informé, il est situé au centre de la grille. Chaque individu adopte l'innovation dès qu'il est informé et diffuse l'information à un autre individu. Il n'y a donc pas de différence entre les informés et les adoptants. Les individus n'ont pas de libre arbitre. La probabilité qu'un individu transmette l'information à un autre individu est déterminée par une matrice de probabilité (la probabilité décroît en fonction de la distance entre les individus) (Figure 19). En choisissant à chaque itération, pour chaque adoptant, un chiffre entre 0 et 1 et en le rapportant à la matrice du champ moyen d'informations (Figure 19), il est possible de déterminer l'individu qui sera informé (Figure 20). Dans ce

modèle, l'innovation se propage très vite et selon un « mécanisme de tâches d'huile ». Pour son troisième modèle, Hägerstrand introduit alors une certaine « résistance » à la diffusion. Chaque individu se voit attribuer un certain niveau de résistance, de telle sorte qu'on obtient pour chaque cellule une distribution des résistances (Figure 21). Pour qu'un individu adopte l'innovation, il faut qu'il reçoive un niveau d'information (ce niveau augmente à chaque fois qu'il est informé par un individu) égal à son niveau de résistance. On obtient une diffusion qui se propage plus lentement et de manière plus concentrée (Figure 22).

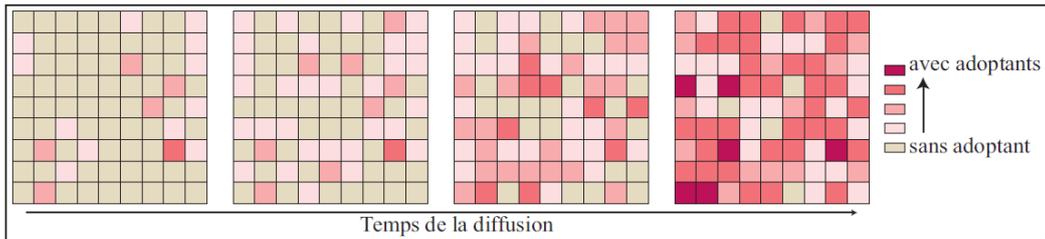


Figure 18 : Exemple de résultats pour le premier modèle d'Hägerstrand (Eric Daudé, 2002).

0,0096	0,0140	0,0168	0,0140	0,0096	0 - 0,0096	0,0096 - 0,0236	0,0236 - 0,0404	0,0404 - 0,0544	0,0544 - 0,0640
0,0140	0,0301	0,0547	0,0301	0,0140	0,0640 - 0,0780	0,0780 - 0,1081	0,1081 - 0,1628	0,1628 - 0,1929	0,1929 - 0,2069
0,0168	0,0547	0,4432	0,0547	0,0168	0,2069 - 0,2237	0,2237 - 0,2784	0,2784 - 0,7216	0,7216 - 0,7763	0,7763 - 0,7931
0,0140	0,0301	0,0547	0,0301	0,0140	0,7931 - 0,8071	0,8071 - 0,8372	0,8372 - 0,8919	0,8919 - 0,9220	0,9220 - 0,9360
0,0096	0,0140	0,0168	0,0140	0,0096	0,9360 - 0,9456	0,9456 - 0,9596	0,9596 - 0,9764	0,9764 - 0,9904	0,9904 - 1

Figure 19 : A droite le champ de contact pour la cellule centrale ($P=0,7966 - 1,585 \log(d)$). A gauche le champ d'information correspondant. Le champ de contact correspondant ici à la probabilité qu'un adoptant placé au centre de la grille informe les autres individus selon leur appartenance à une cellule. Le champ d'information se calcule simplement à partir du champ de contact.

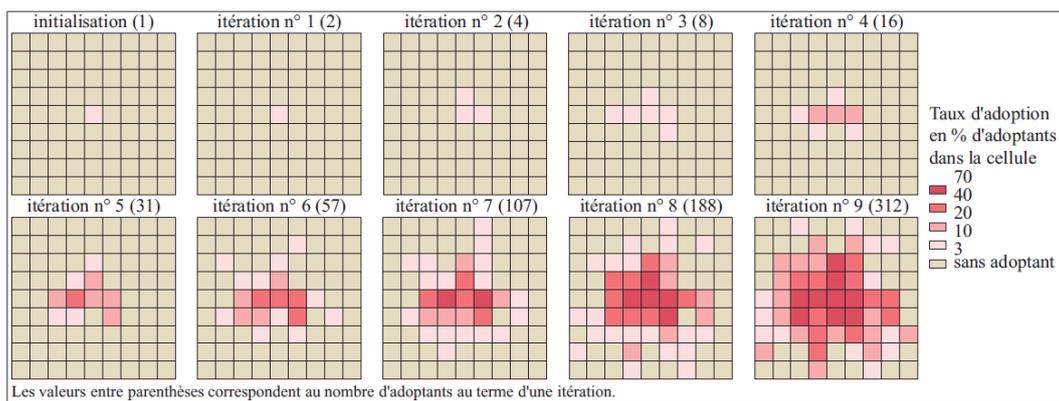


Figure 20 : Exemple de résultats pour le deuxième modèle d'Hägerstrand (Eric Daudé, 2002).

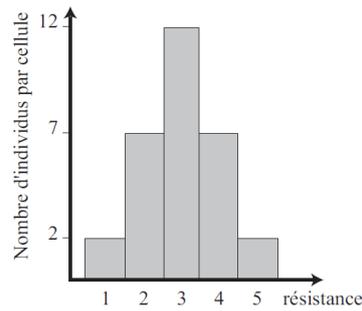


Figure 21 : Distribution des résistances dans une même cellule (30 individus au total).

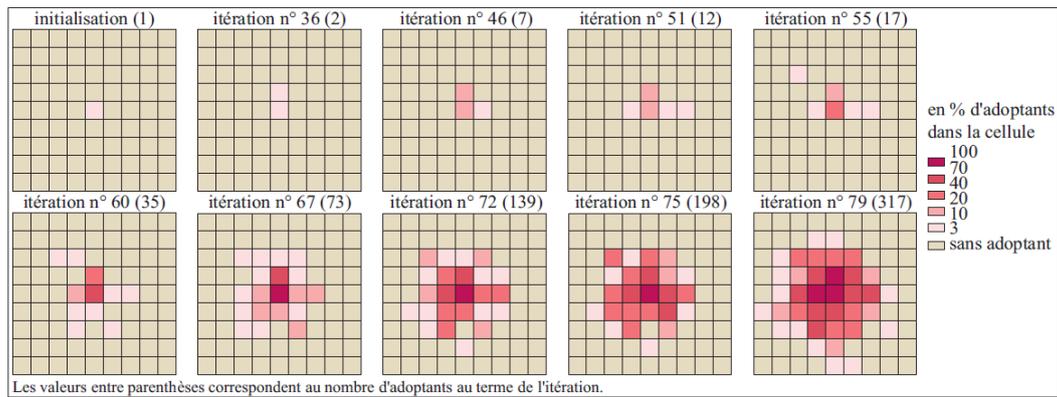


Figure 22 : Exemple de résultats obtenus pour le troisième modèle d'Hägerstrand (Eric Daude, 2002).

➤ Les modèles de ségrégation : le modèle Schelling

Dans les années 1970, Thomas C. Schelling a proposé un modèle afin d'expliquer le lien entre ségrégation spatiale et les préférences individuelles concernant cette ségrégation. Il suffit pour mettre en œuvre ce modèle de disposer d'une information concernant les préférences des individus et d'une dichotomie permettant de ranger une population en deux groupes distincts. Son application au cas urbain a grandement participé à son « succès ». Il faut dire que sa conclusion principale a de quoi marquer les esprits par son côté paradoxal. En effet, Schelling montre qu'une forte ségrégation peut être le résultat collectif de décisions individuelles qui ne visent pas à une telle ségrégation. Ainsi, même si les individus sont « tolérants », on aboutit presque toujours à des situations de ségrégation.

Pour comprendre ce modèle, commençons par le présenter plus précisément. Prenez un échiquier (une matrice 8×8 représentant le territoire étudié) et placez-y des pions de deux genres différents (ce sont nos deux groupes). Vous avez là une représentation très stylisée d'une aire urbaine où se côtoient deux populations. Ce pourrait être des Catholiques et des Protestants, des riches et des pauvres ou tout autre clivage. Pour représenter un tel clivage, nous allons répartir des pions noirs et pions blancs sur l'échiquier. Au départ, ces pions sont rangés alternativement pour représenter l'intégration la plus parfaite possible entre deux communautés. Schelling ajoute ensuite une règle de déplacement des pions : bien que

« tolérants », les individus déménageront si, parmi leurs voisins immédiats, au moins deux tiers ne sont pas de la même couleur qu'eux. En sens inverse, ils seront satisfaits et ne déménageront pas si, parmi leurs voisins immédiats, strictement plus d'un tiers sont de couleur identique. Cette règle du tiers peut sembler assez souple, car on ne peut pas dire que les individus recherchent la ségrégation : ce n'est qu'à partir du moment où chacun souhaite être majoritaire que la ségrégation est véritablement visée. En deçà, certaines minorités peuvent s'accepter et le mélange des deux communautés reste possible. Néanmoins, il est évident que de véritables individus tolérants ne tiendraient pas compte de la couleur de leurs voisins.

Dans une situation de départ alterné avec les coins vides, tous les individus sont satisfaits de leur voisinage. On effectue alors une petite perturbation. On commence par retirer au hasard 8 pions blancs et 8 pions noirs, puis on remet 8 pions au hasard, la couleur de chacun étant elle aussi choisie aléatoirement (il y a donc finalement 52 pions et 12 cases vides). Cette perturbation suffit le plus souvent à engendrer un peu d'insatisfaction et les pions concernés seront alors amenés à se déplacer au hasard (ces pions sont entourés en rouge) vers des cases vides jusqu'à ce que l'on atteigne un nouvel état d'équilibre où tous les pions seront satisfaits en regard de la règle du tiers (Figure 23). Dans ces conditions, le résultat est surprenant : des quartiers noirs et des quartiers blancs apparaissent sans que personne ne le veuille réellement. Or, ce n'est pas un résultat marginal. Comme le dit Schelling, réessayez plusieurs fois de jouer à ce jeu et vous aboutirez probablement à chaque fois à une forte ségrégation.

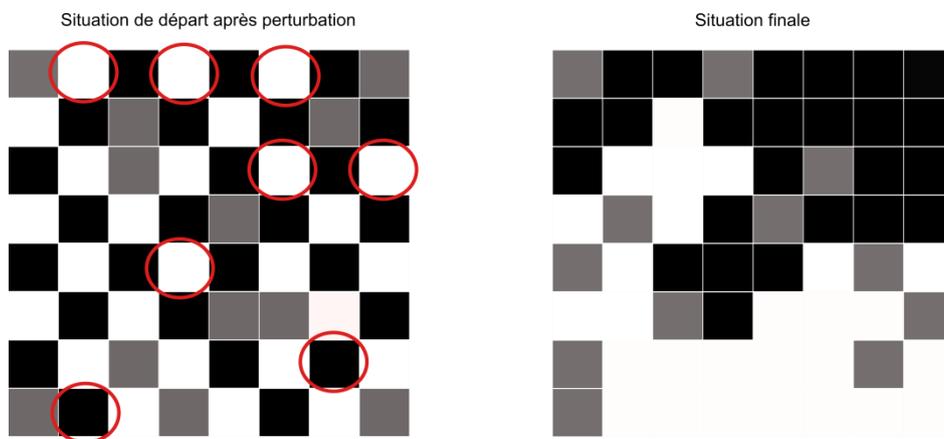


Figure 23 : Le modèle de Schelling illustré. En gris les cases vides, en blanc et en noir les deux populations. Les pions amenés à se déplacer sont entourés en rouge.

Le modèle de Schelling est un exemple à la fois simple et significatif de la notion d'émergence dans un système complexe. Ce modèle montre que le tout (c'est-à-dire le comportement collectif) ne se déduit pas simplement des règles du comportement individuel. Pour simuler ce modèle, qui peut être généralisé à plus de deux groupes, il faut passer par un automate cellulaire ou un système à base d'agents. Ce modèle a suscité de nombreux débats et fait l'objet de nombreuses interprétations et propositions d'extension. Néanmoins, en matière d'analyse spatiale *stricto sensu*, l'espace y est réduit à un support neutre, n'exerçant aucune influence particulière sur la dynamique même du modèle.

Pour disposer d'un exemple pratique, nous allons utiliser le logiciel SPACELLE (<http://www.spatial-modelling.info/Cellular-Automata-SPACELLE>). A partir de ce logiciel, il faut ouvrir le fichier « Schelling_test.ac5 » ([lien](#)). Ce fichier reproduit le modèle de Schelling avec un taux de tolérance de 20%. Lorsque vous ouvrez le fichier sous SPACELLE (« Fichier → Ouvrir »), vous obtenez une grille totalement vide :

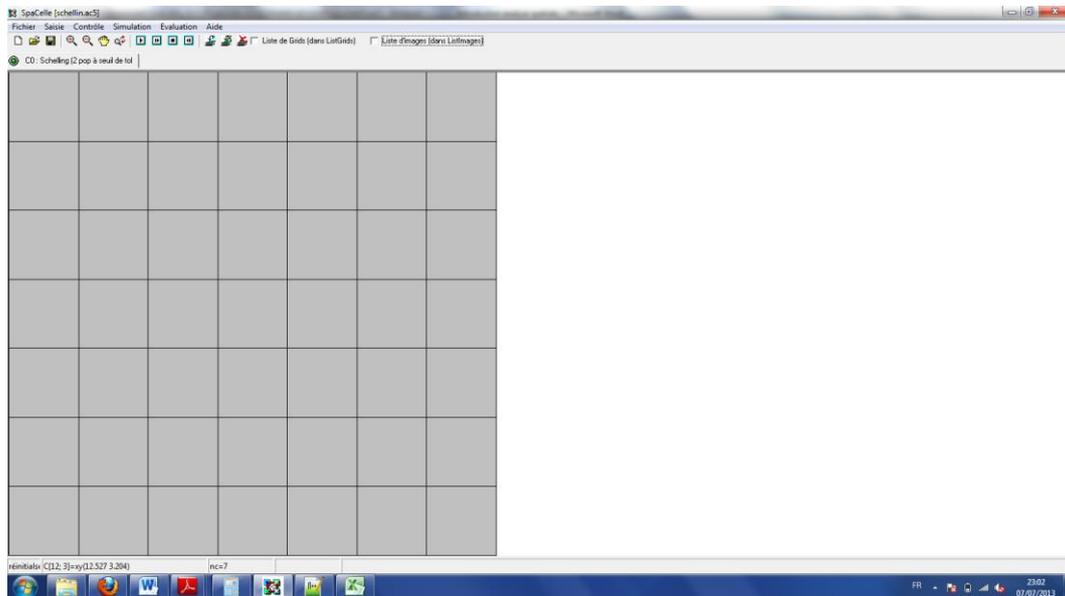


Figure 24 : Visualisation de SPACELLE après ouverture du fichier « Schelling_test.ac5 ».

Premièrement, cliquez sur l'onglet « Saisie », puis sur « A (Population A) ». Ensuite, en cliquant sur la grille, placez 15 membres de la population A de manière à éviter qu'ils soient connexes :

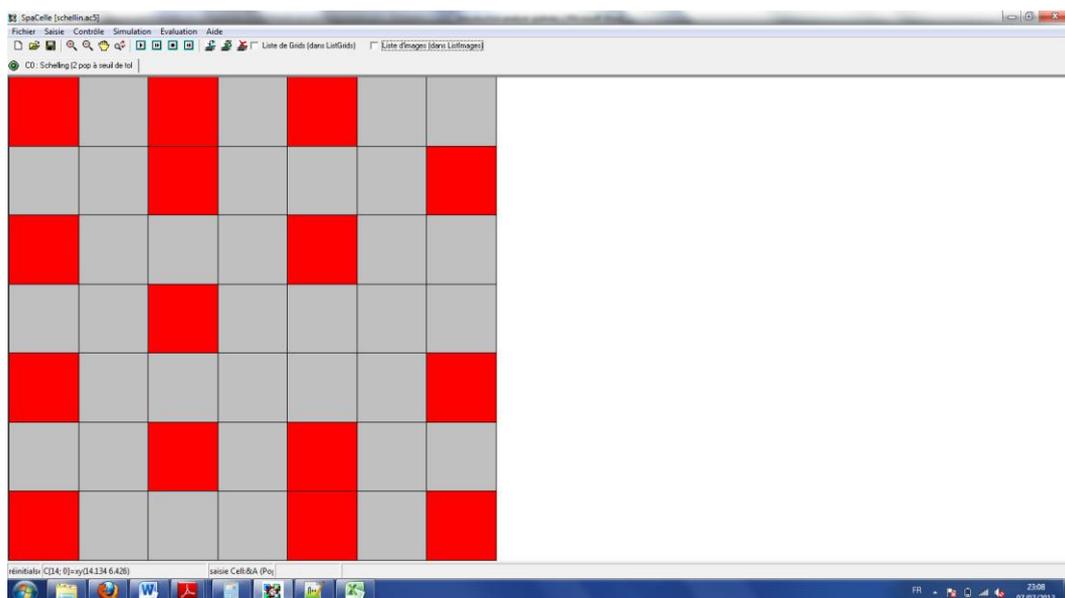


Figure 25 : Positionnement de la population A (15 individus).

Faire de même avec la population B, pour cela il ne faut pas hésiter à mettre la population B à côté de la population A :

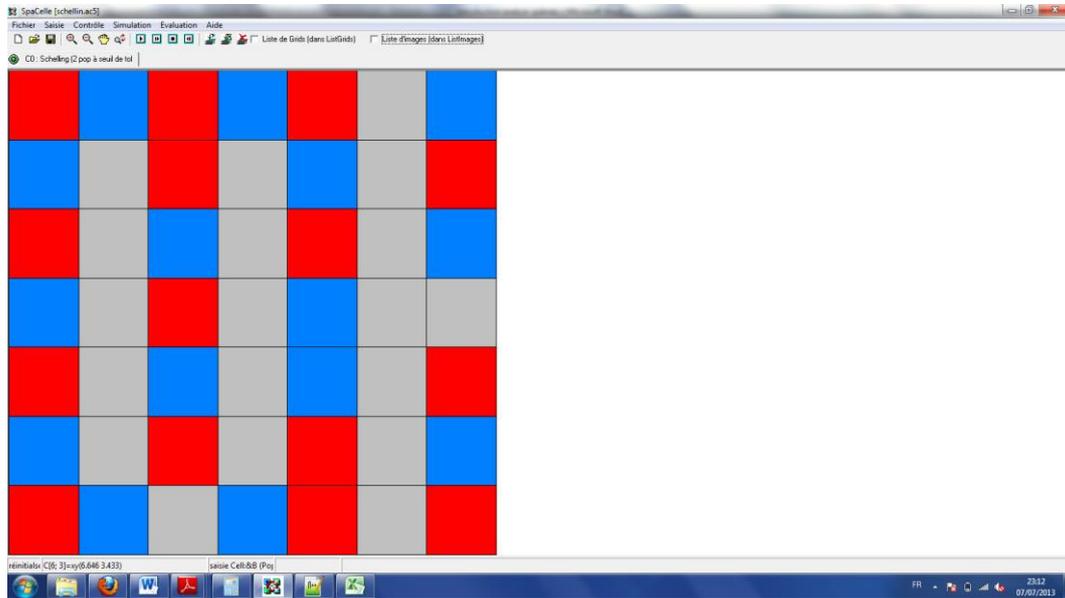


Figure 26 : Positionnement des populations A et B (15 individus chacun). La situation est non ségrégée.

Cliquez sur la touche  pour lancer la simulation, puis après quelques secondes arrêtez la simulation , vous allez pouvoir constater qu'un processus de ségrégation à changer la situation de départ :

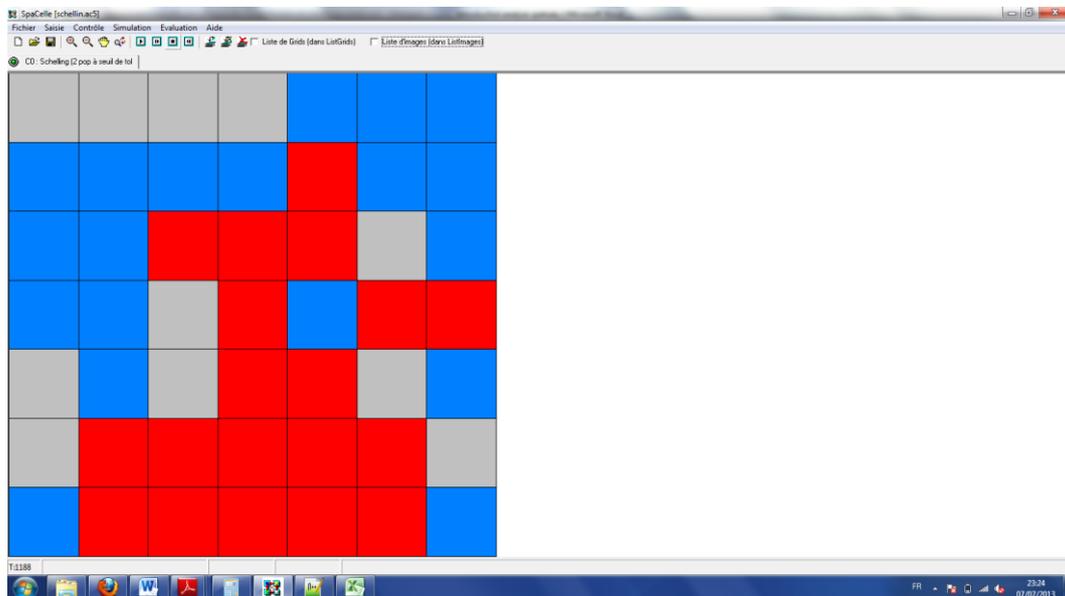


Figure 27 : Exemple d'un résultat obtenu avec le modèle de Schelling après plusieurs itérations, la situation est bien ségrégée.

Vous pouvez encore faire tourner le modèle. Si les populations A et B continuent à se déplacer, il y a toujours ségrégation :

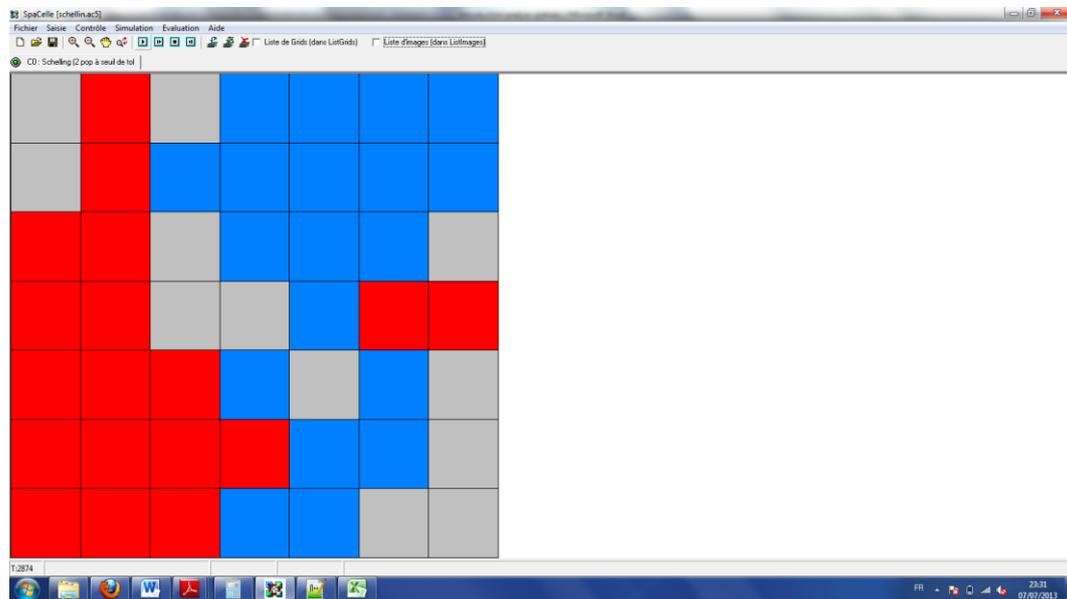


Figure 28 : Deuxième exemple d'un résultat obtenu avec le modèle de Schelling, la situation est toujours ségrégée.

Deuxièmement, nous allons reproduire l'exemple précédent. Réinitialisez le modèle en cliquant sur , puis cliquez sur l'onglet « Saisie » et sur « A (Population A) ». Ensuite, en cliquant sur la grille placez les membres de la population A comme ci-dessous. Faites de même pour la population B.

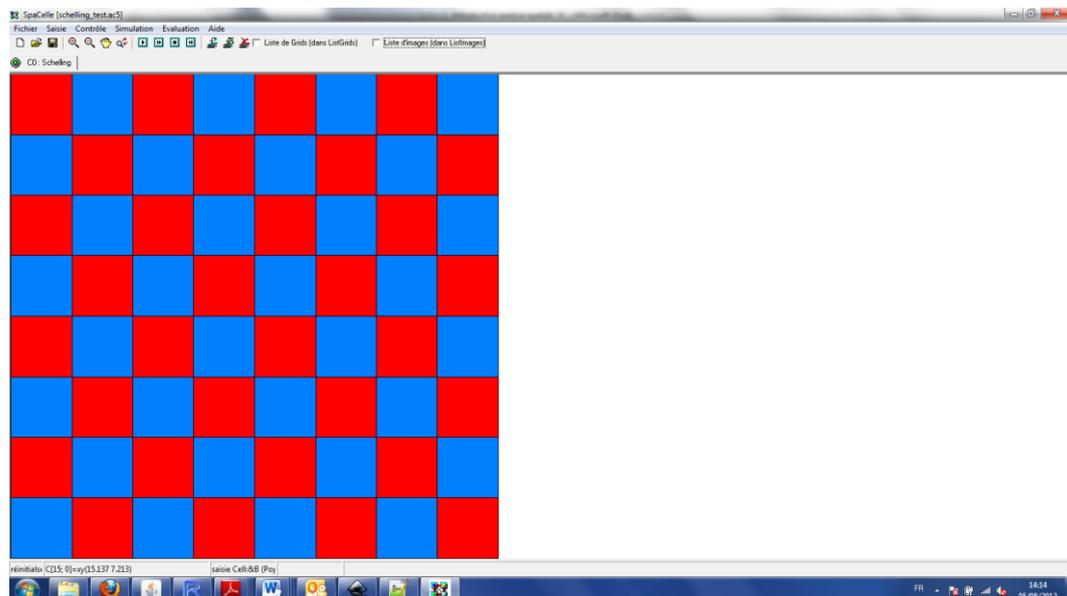


Figure 29 : Positionnement des populations A et B. La situation n'est pas ségrégée.

Ensuite, placez une douzaine d'espaces vides de manière aléatoire, comme ci-dessous :

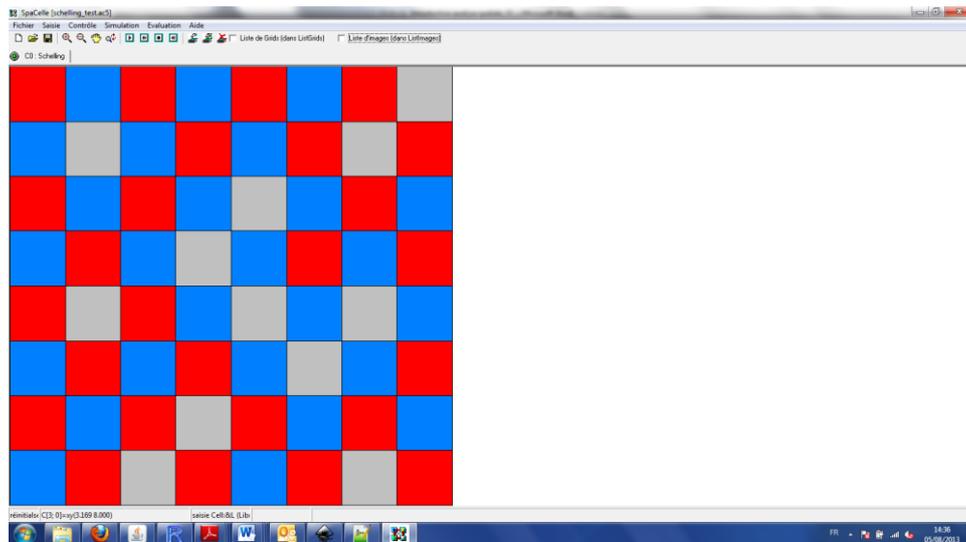


Figure 30 : Positionnement des populations A et B et d'une douzaine d'espaces vides de manière aléatoire. La situation n'est pas ségrégée.

Au bout d'un certain temps de simulation, vous obtenez de nouveau une répartition ségrégée :

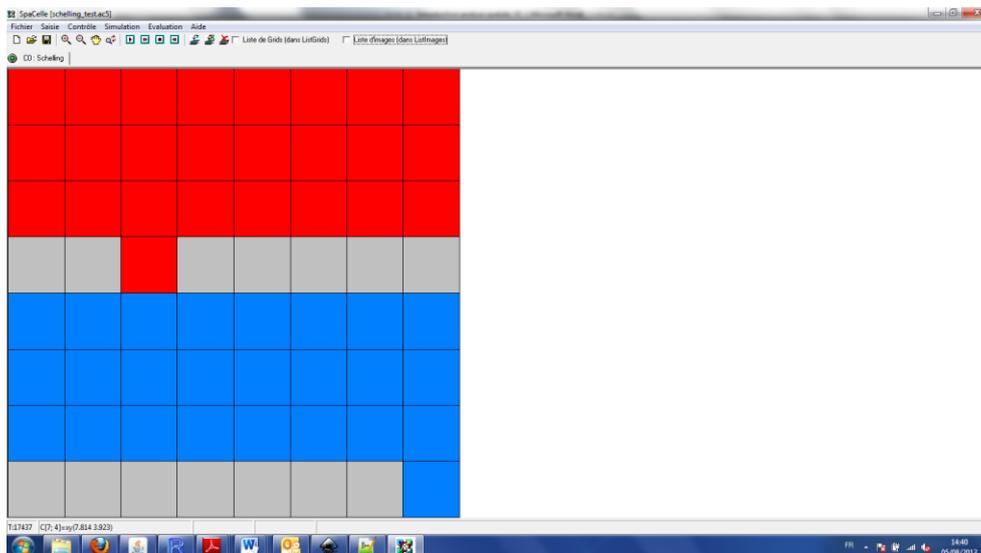


Figure 31 : Exemple d'un résultat obtenu avec le modèle de Schelling, la situation est bien ségrégée.

Les outils de l'analyse spatiale

Pour faire de l'analyse spatiale, il est nécessaire d'avoir des connaissances dans différents domaines complémentaires à la géographie. Comme vous avez été amenés à le voir précédemment, il faut notamment des connaissances en mathématiques (comme par exemple

pour la loi rang-taille ou le modèle de Huff) et en informatique (comme par exemple pour les modèles de ségrégation ou l'analyse de graphes). Ces domaines sont considérés comme des outils pour effectuer de l'analyse spatiale. De surcroît, l'analyse spatiale n'est pas uniquement composée de modèles. Il existe aussi de nombreux indicateurs permettant de mettre en exergue certains phénomènes spatiaux. Ce complément de cours propose donc trois initiations : une initiation à la statistique spatiale, une initiation à la théorie des graphes et une initiation à la simulation informatique.

La statistique spatiale

Un outil privilégié de l'analyse spatiale est l'analyse statistique. En effet, l'analyse spatiale s'appuie sur de l'information géographique qui est composée par des informations concernant la localisation des objets étudiés (c'est la composante spatiale) et des informations relatives à leurs caractéristiques, leurs propriétés (c'est la composante sémantique). Or, la statistique propose de nombreux outils, indicateurs, méthodes permettant d'analyser la composante sémantique. Ainsi, la solution la plus simple, mais sans doute pas la plus satisfaisante, pour analyser l'information géographique consiste alors à analyser la composante sémantique sans tenir compte de la composante spatiale en effectuant des analyses statistiques classiques. Ces analyses statistiques peuvent ensuite être cartographiées afin de tirer profit de la composante spatiale.

➤ **L'analyse de données**

Les statistiques sont abordées assez tôt dans l'enseignement des mathématiques, bien que ce champ soit plutôt récent (les théories statistiques prennent corps durant le XXème siècle). En effet, les statistiques trouvent de nombreuses applications pratiques et contribuent à rendre les mathématiques moins abstraites. Dans les faits, la statistique est un domaine des mathématiques qui possède une composante théorique et une composante appliquée. Désormais, le minimum, le maximum, l'étendu, la moyenne, la médiane, les quartiles, l'écart-type et la variance font partie du socle commun des études secondaires. Ce sont des éléments permettant de décrire et de résumer les variables d'une population. On considère cela comme de l'analyse descriptive de données. Néanmoins, ces valeurs simplifient beaucoup la complexité du jeu de données de départ. Ainsi, des jeux de données très différents peuvent avoir la même moyenne et la même médiane.

Le maximum de la variable j : $X_j^{max} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} x_{ij}$

Le minimum de la variable j : $X_j^{min} = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} x_{ij}$

L'étendu de la variable j : $w_j = X_j^{max} - X_j^{min}$

La moyenne de la variable j : $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$

La variance de la variable j : $V(X_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$

$$\text{L'écart-type de la variable } j : \sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2} = \sqrt{V(X_j)}$$

Avant d'aller plus loin, il est important de revenir sur quelques termes. Une population est une collection d'objets ayant des propriétés communes (ce sont les lignes de votre fichier Excel). Ces objets sont appelés « individus », ces derniers sont les éléments de la population étudiée (une ligne = un individu). Ces individus alors caractérisés par des variables (ces sont les colonnes, les champs de votre jeu de données). Une variable est alors une propriété commune aux individus de la population que l'on souhaite étudier (une variable = une colonne). On note alors : X la population ; X_i les individus ; X_j les variable ; x_{ij} la valeur prise par une variable j et un individu i .

A contrario des éléments ci-dessus, les distributions ont pour objectif de décrire finement les jeux de données, tout en simplifiant malgré tout leur interprétation. Pour cela, il peut être pertinent d'avoir recours à une représentation graphique : le diagramme de fréquence ou diagramme de distribution. Une distribution est simplement une énumération de toutes les valeurs prises par le jeu de données étudié avec leurs probabilités (fréquences) respectives. Cette représentation peut se faire par plage de valeurs. En matière d'analyse spatiale, ces distributions s'appuient généralement sur des fréquences. La fréquence désigne un nombre d'éléments rapporté à l'ensemble plus large auquel ces éléments appartiennent. Cette fréquence peut s'exprimer en % ou en fraction de 1. Par exemple, prenons le jeu de données suivant : 1, 2, 1, 0, 3, 4, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 4, 0, 0. On peut établir le comptage de chaque valeur prise par la variable. De ces comptages, on en déduit les fréquences respectives :

Les valeurs	Comptage	Fréquence
0	4	$4/20 = 0,2$
1	6	$6/20 = 0,3$
2	5	$5/20 = 0,25$
3	3	$3/20 = 0,15$
4	2	$2/20 = 0,1$
Total :	20	1

Tableau 21 : Le calcul des fréquences d'une variable.

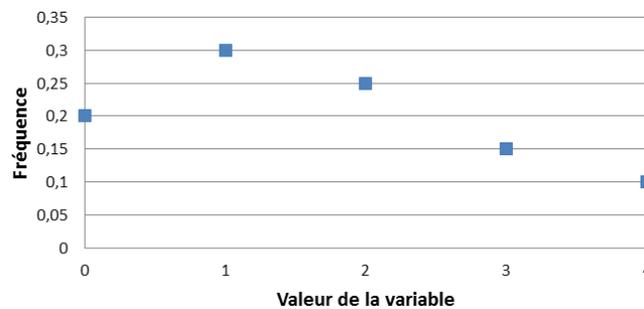


Figure 32 : Le diagramme d'une distribution de fréquence.

On peut aussi travailler à partir des fréquences (des probabilités) cumulées. Lorsque ces fréquences cumulées sont représentées dans un graphique, on parle de diagramme de répartition.

Valeur	Comptage	Fréquence	Fréquence cumulée
0	4	$4/20 = 0,2$	0,2
1	6	$6/20 = 0,3$	$0,2 + 0,3 = 0,5$
2	5	$5/20 = 0,25$	$0,5 + 0,25 = 0,75$
3	3	$3/20 = 0,15$	$0,75 + 0,15 = 0,9$
4	2	$2/20 = 0,1$	$0,9 + 0,1 = 1$
Total :	20	1	

Tableau 22 : Le calcul des fréquences cumulées d'une variable.

Il est aussi pertinent de représenter les distributions par des fonctions mathématiques qui s'en rapprochent (Figure 33). Lorsque l'on utilise ces fonctions (courbes), on parle de densité de distribution ou de répartition. En théorie des probabilités et en statistique, une loi de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard. Ces lois de probabilité peuvent alors servir à étudier des distributions pour déterminer si les variables suivent un comportement aléatoire.

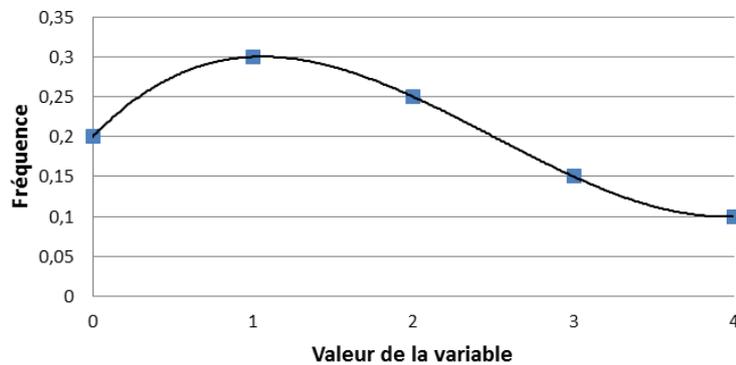


Figure 33 : Le diagramme d'une distribution de fréquence et sa fonction mathématique approchée (ici un polynôme du troisième degré).

Par exemple, la loi normale (ou loi gaussienne) est une loi centrale en théorie des probabilités et en statistique [18]. Elle décrit le comportement des séries d'expériences aléatoires lorsque le nombre d'essais est très grand. La loi normale est caractérisée par sa moyenne (qui est également sa médiane) et par son écart-type. Sa densité est symétrique et sa forme est communément appelée « courbe de Gauss » ou « courbe en cloche ».

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad [18]$$

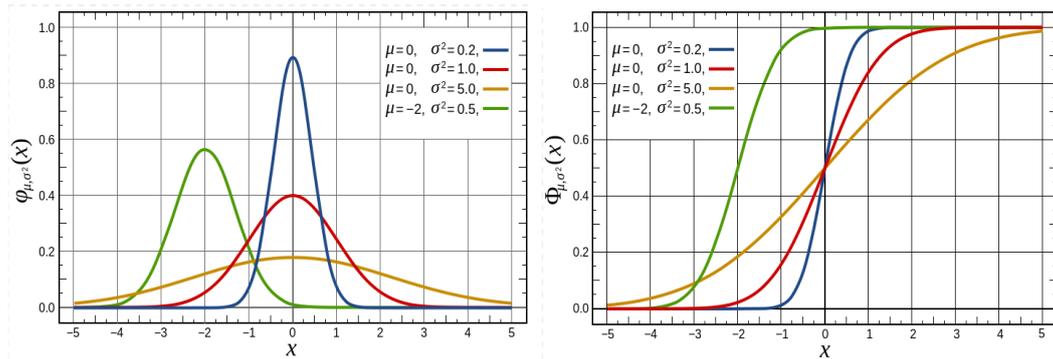


Figure 34 : La loi normale pour différentes valeurs (densité de probabilité et de répartition).

Si l'on veut conserver le caractère discret de la distribution, il est possible d'avoir recours à la binomiale :

$$p(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad [19]$$

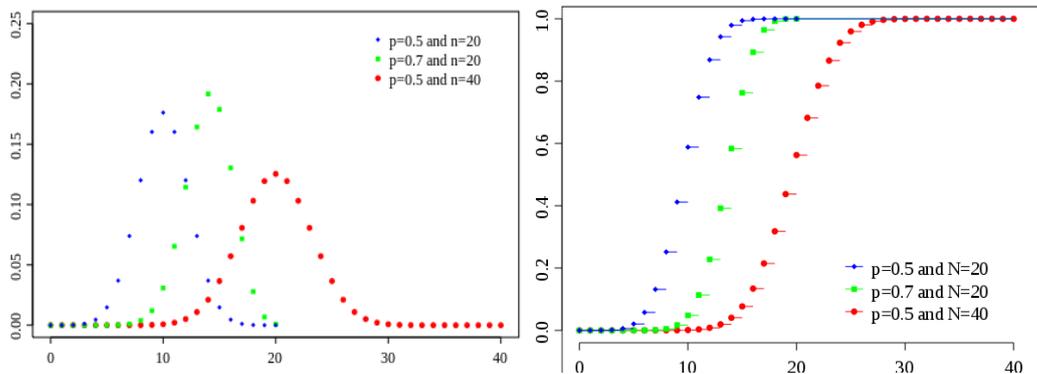


Figure 35 : La loi binomiale pour différentes valeurs (densité de probabilité et de répartition).

Des lois discrètes peuvent se rapprocher de la loi binomiale, comme la loi de Poisson. La loi de Poisson est la loi des petites probabilités parfois appelée loi des événements rares (c'est-à-dire des événements avec une probabilité faible). Si la loi normale donne une bonne approximation de la loi binomiale pour q fixé et n tendant vers l'infini, la loi de Poisson, quant à elle, décrit bien la loi binomiale pour n tendant vers l'infini et q tendant vers zéro, avec le produit nq tendant vers une constante.

En général, le diagramme de distribution obtenu avec une loi de Poisson est dissymétrique (par rapport à λ) avec un étalement marqué vers la droite, car les valeurs élevées d'une variable de Poisson sont peu rencontrées. A mesure que λ augmente, la forme de la distribution tend à devenir symétrique et s'approche de celle de la loi normale.

$$p(k) = P(X = k) = e^{-k} \frac{\lambda^k}{k!} \quad [20]$$

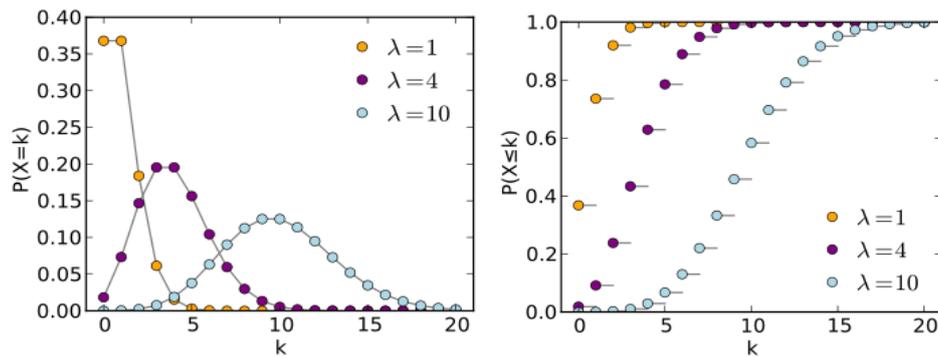


Figure 36 : La loi de poisson pour différentes valeurs de k et de λ (densité de probabilité et de répartition).

Enfin, la loi log-normale est une autre loi de probabilité fréquemment rencontrée dans la nature et dans les diverses activités humaines. Une variable aléatoire X suit une loi log-normale quand son logarithme suit une loi normale. Ces lois sont utilisées dans le même cadre que les lois normales lorsque les observations sont le résultat d'un effet multiplicatif d'un très grand nombre d'autres variables indépendantes entre elles et individuellement négligeables.

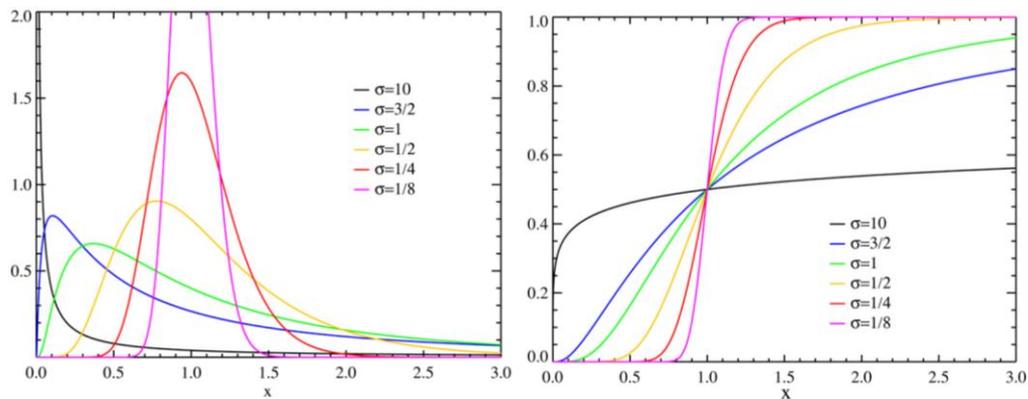


Figure 37 : La loi log-normale pour différentes valeurs (densité de probabilité et de répartition).

Depuis le début de cette introduction sur les statistiques, nous avons considéré que la population X était caractérisée par plusieurs variables, mais nous avons présenté jusqu'ici que des outils statistiques qui décrivent une seule variable et ce indépendamment des autres (on parle d'analyse univariée). Néanmoins, il est souvent pertinent d'étudier les relations pouvant exister entre les variables (on parle d'analyse multi-variée). En statistique, les analyses multivariées étudient la distribution conjointe de plusieurs variables. Les analyses multivariées sont très diverses selon l'objectif recherché, la nature des variables et la mise en œuvre formelle. Ainsi, on peut identifier deux grandes familles d'analyse : celle des méthodes descriptives (visant à structurer et résumer l'information) et celle des méthodes explicatives visant à expliquer une ou des variables dites « dépendantes » (variables à expliquer) par un ensemble de variables dites « indépendantes » (variables explicatives). Nous allons tout

d'abord nous focaliser sur les méthodes descriptives, dans la continuité de ce qui a été déjà présenté.

La covariance est un nombre permettant d'évaluer le sens de variation de deux variables aléatoires et, ainsi, de qualifier l'indépendance de deux variables [21]. Une matrice de covariance est une matrice carrée caractérisant les interactions (linéaires) entre p variables aléatoires X_1, \dots, X_p [22]. Il se révèle aussi intéressant d'étudier la corrélation entre deux ou plusieurs variables, c'est-à-dire d'étudier l'intensité de la liaison qui peut exister entre ces variables [23]. Une matrice de corrélation regroupe les corrélations de plusieurs variables entre elles, les coefficients indiquant l'influence que les variables ont les unes sur les autres.

$$\text{cov}(X_j, X_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k) \quad [21]$$

$$\begin{pmatrix} V(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_p) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & V(X_2) & \dots & \text{cov}(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_p, X_1) & \text{cov}(X_p, X_2) & \dots & V(X_p) \end{pmatrix} \quad [22]$$

$$r(X_j, X_k) = \frac{\text{cov}(X_j, X_k)}{\sigma_j \times \sigma_k} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2} \times \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_k)^2}} \quad [23]$$

De manière générale, les analyses multivariées comparent les variables entre elles, mais elles peuvent aussi être intéressantes pour comparer les individus entre eux. Ainsi, on peut classer les individus en regroupant ceux qui se « ressemblent ». Pour cela, on va s'appuyer sur des matrices (tableaux) de distance (de ressemblance, d'échange).

Parmi les méthodes d'analyse de données multivariées, la méthode factorielle est très appréciée par les géographes. Ainsi, les manuels d'analyse spatiale y font souvent référence. La méthode factorielle a pour but de réduire le nombre de variables en perdant le moins d'informations possibles, c'est à dire en gardant le maximum de variabilité totale. Cela revient à projeter les données des variables sur un espace de dimension inférieure en maximisant la variabilité totale des nouvelles variables. Pour faire simple, en règle générale, on tente de représenter les individus définis par plusieurs variables sur un graphique 2D facilement interprétable.

L'analyse en composantes principales (ou ACP) est la méthode la plus couramment utilisée parmi les méthodes d'analyse factorielle. L'objectif de l'ACP est purement descriptif : il s'agit « d'explorer » un ensemble d'observations rassemblées sous la forme d'un tableau de données. Le tableau de données peut être de dimensions importantes : le nombre de lignes (d'unités statistiques) peut atteindre plusieurs centaines, et le nombre de colonnes (de variables) plusieurs dizaines. L'analyse en composantes principales est fondée sur le calcul des moyennes, des variances et des coefficients de corrélation.

Mathématiquement, l'analyse en composantes principales est un simple changement de base : passer d'une représentation dans la base canonique des variables initiales à une représentation dans la base des facteurs définis par les vecteurs propres de la matrice des

corrélations. Elle suit les étapes suivantes : 1) on centre le tableau de données 2) on calcule la matrice de variance-covariance 3) on réduit la matrice centrée afin d'avoir une matrice centrée réduite 4) on calcule la matrice des corrélations 5) on détermine les axes principaux à l'aide des valeurs et des vecteurs propres de la matrice des corrélations 6) on calcule la matrice des composantes principales 7) on calcule la qualité de la représentation.

Pour illustrer cette méthode d'analyse de données multivariées, nous allons nous appuyer sur un exemple concret. Prenons le tableau ci-dessous, qui regroupe 4 individus caractérisés par 3 variables. Afin d'analyser ce jeu de données, nous allons effectuer une ACP afin de déterminer les composantes principales nous permettant de le représenter au mieux dans un plan.

	Géographie	Revenu	Age
Individu_1	8	30	55
Individu_2	2	6	40
Individu_3	5	15	30
Individu_4	7	22	40

Tableau 23 : Le jeu de données de l'ACP.

Pour la première étape, nous allons calculer les moyennes des différentes variables (5,5 ; 18,25 ; 41,25) pour les soustraire aux valeurs du tableau de départ. Cela revient à centrer le tableau de données, on obtient la matrice suivante :

$$X = X0 - \bar{X} = \begin{pmatrix} 2.5 & 11.75 & 13.75 \\ -3.5 & -12.25 & -1.25 \\ -0.5 & -3.25 & -11.25 \\ 1.5 & 3.75 & -1.25 \end{pmatrix} \quad [24]$$

Pour la deuxième étape, il convient de calculer la matrice de variance-covariance. Pour cela, on effectue une opération matricielle assez simple, en s'appuyant sur une matrice diagonale D. D est appelée « matrice des poids statistiques » (elle est inversement proportionnelle au nombre d'individus).

$$D = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad [25]$$

$$V = X'DX = \begin{pmatrix} 2.5 & -3.5 & -0.5 & 1.5 \\ 11.75 & -12.25 & -3.25 & 3.75 \\ 13.75 & -1.25 & -11.25 & -1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 & 11.75 & 13.75 \\ -3.5 & -12.25 & -1.25 \\ -0.5 & -3.25 & -11.25 \\ 1.5 & 3.75 & -1.25 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 5.25 & 19.88 & 10.63 \\ 19.88 & 78.19 & 52.19 \\ 10.63 & 52.19 & 79.69 \end{pmatrix} \quad [26]$$

Pour réduire la matrice X, qui correspond à la troisième étape, on calcule tout d'abord une matrice M. Ensuite, la diagonale de la matrice T est formée par les racines carrés des termes de M. On peut alors calculer une matrice intermédiaire Y.

$$M = \text{diag}(V)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1/78.19 & 0 \\ 0 & 0 & 1/79.69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1905 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0128 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0125 \end{pmatrix} \quad [27]$$

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{0.1905} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{0.0128} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{0.0125} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4364 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1121 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1120 \end{pmatrix} \quad [28]$$

$$Y = X T' = \begin{pmatrix} 1.0911 & 1.3288 & 1.5403 \\ -1.5275 & -1.3854 & -0.1400 \\ -0.2182 & -0.3675 & -1.2603 \\ 0.6547 & 0.4241 & -0.1400 \end{pmatrix} \quad [29]$$

Pour calculer la matrice des corrélations, on effectue dès lors les calculs suivants :

$$\tilde{Y} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y = \frac{1}{2} Y = \begin{pmatrix} 0.5455 & 0.6644 & 0.7702 \\ -0.7638 & -0.6927 & -0.0700 \\ -0.1091 & -0.1838 & -0.6301 \\ 0.3273 & 0.2120 & -0.0700 \end{pmatrix} \quad [30]$$

$$R = \tilde{Y}' Y' = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.9810 & 0.5195 \\ 0.9810 & 1.0000 & 0.6612 \\ 0.5195 & 0.6612 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad [31]$$

On détermine dans un cinquième temps les matrices des vecteurs propres et des valeurs propres (respectivement u et vap) de la matrice des corrélations R . On obtient :

$$u = \begin{pmatrix} -0.5988 & -0.6515 & -0.4658 \\ -0.6277 & 0.7430 & -0.2322 \\ -0.4974 & -0.1534 & 0.8539 \end{pmatrix} \text{ et } vap = \begin{pmatrix} 2.4598 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0034 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5368 \end{pmatrix} \quad [32]$$

Les deux plus grandes valeurs propres ($\lambda_1=2.4598$ et $\lambda_2=0.5368$) donnent la valeur de la variance expliquée par les 2 axes factoriels choisis pour le plan principal. On calcule alors la matrice des composantes principales, puis l'on obtient les nouvelles coordonnées des individus dans le plan factoriel.

$$C = Y u = \begin{pmatrix} -2.2536 & 0.0403 & 0.4984 \\ 1.8540 & -0.0128 & 0.9137 \\ 0.9882 & 0.0624 & -0.8891 \\ -0.5886 & -0.0899 & -0.5230 \end{pmatrix} \quad [33]$$

	C1	C3
Individu_1	-2.2535	0.4984
Individu_2	1.8540	0.9137
Individu_3	0.9882	-0.8891
Individu_4	-0.5886	-0.5230

Tableau 24 : Les nouvelles coordonnées des individus dans le plan factoriel.

Enfin, on calcule que 99,99% de la variance est expliquée par les deux axes factoriels choisis. En effet, le taux de variance expliqué par les q premiers axes factoriels et relatif aux q plus grandes valeurs propres est égal à :

$$\tau_q = \frac{\sum_{\alpha=1}^q \lambda_{\alpha}}{\sum_{\alpha=1}^p \lambda_{\alpha}} = \frac{2.4598 + 0.5368}{3} = 0.9989 \quad [34]$$

En ce qui concerne les méthodes explicatives, la régression est un ensemble de méthodes statistiques très utilisé. La régression permet d'analyser la relation d'une variable par rapport à une ou plusieurs autres. Dans le cas le plus simple, l'objectif est d'étudier l'influence d'une variable quantitative X sur une autre variable quantitative Y. La première est souvent appelée variable explicative (ou encore exogène) et la seconde est appelée variable expliquée (ou encore endogène). Pour cela, on compare les valeurs prises par chacune des deux variables pour chaque individu. Ainsi, si l'on représente les variables sur un graphique avec en abscisse la variable X et en ordonnée la variable Y, on peut entrevoir cette relation si elle existe :

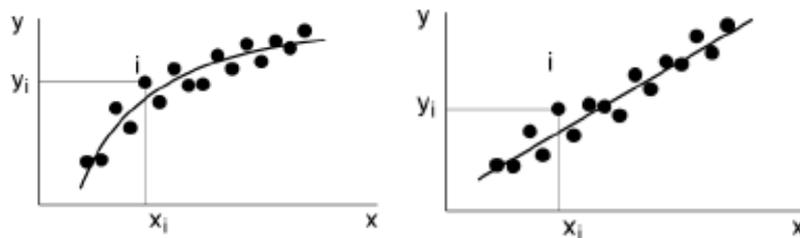


Figure 38 : Deux représentations graphiques de relations entre deux variables.

On le voit bien, dans les deux cas ci-dessus, les variables ne se répartissent pas de n'importe quelle manière. Les deux courbes tracées en noir représentent les meilleures estimations possibles des valeurs de la variable Y en se fondant uniquement sur les valeurs de la variable X. Autrement dit, dans le cas le plus simple (celui de droite), la régression cherche une droite $y = ax + b$ qui décrive au mieux la tendance du nuage observé. La démarche la plus couramment utilisée consiste à :

- faire l'hypothèse que, pour chaque individu i , on a: $y_i = a x_i + b + e_i$, où e_i est une certaine «erreur» appelée résidu ;
- à rechercher la droite $y^*=ax+b$ (la droite des moindres carrés) telle que la somme quadratique des résidus e_i soit minimale, c'est-à-dire que $S = \sum_{i=1}^n e_i^2$ soit minimale.

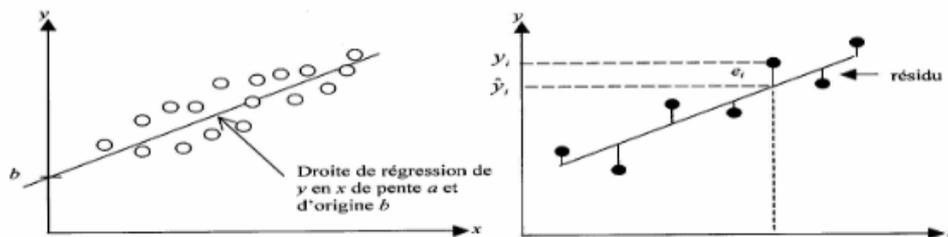


Figure 39 : Notions de « droite de régression » et de « résidu ».

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la variance, en supposant que les résidus suivent une loi normale centrée. Toutefois, si l'échantillon présente des valeurs aberrantes, il vaudra mieux utiliser d'autres méthodes. La méthode des moindres carrés est très simple à appliquer. Elle s'effectue à l'aide d'un simple produit matriciel. Ce calcul peut se révéler encore plus simple si la droite de régression recherchée est de type $y = ax + b$. En effet, un calcul assez simple montre que :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad [35]$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad [36]$$

Pour avoir une application, prenons un cas théorique où l'on cherche à déterminer la droite qui approxime le mieux le revenu médian des ménages vis-à-vis de leur distance au centre (Tableau 25). Il semble en effet qu'il existe une relation linéaire assez évidente entre ces deux variables (Figure 1).

Revenu médian (Y)	30 000	28 000	21 000	14 000
Distance au centre (X)	0	100	500	1000

Tableau 25 : Le revenu médian des ménages et leur distance au centre.

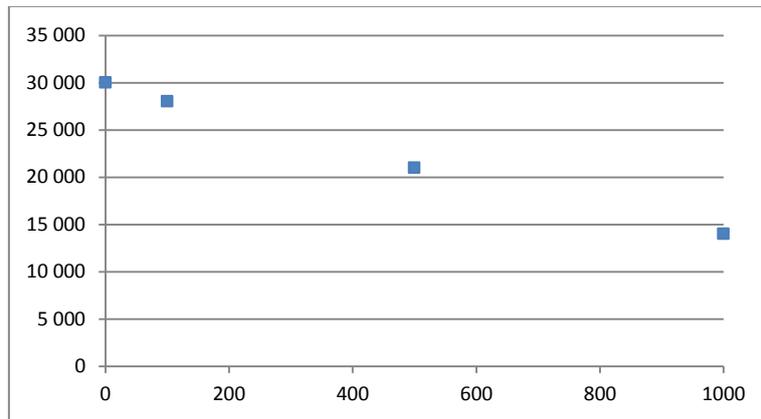


Figure 40 : Le revenu médian des ménages et leur distance au centre.

Pour calculer a et b , il faut tout d'abord calculer la moyenne des distances au centre $\bar{X} = 400$ et la moyenne des revenus médians $\bar{Y} = 23\,250$, puis remplir le tableau suivant :

x_i	Y_i	$x_i - \bar{X}$	$y_i - \bar{Y}$	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$
0	30 000	- 400	6 750	- 2 700 000	160 000	45 562 500
100	28 000	- 300	4 750	- 1 425 000	90 000	22 562 500
500	21 000	100	- 2 250	- 225 000	10 000	5 056 250
1000	14 000	600	- 9 250	- 5 550 000	360 000	85 562 500
				- 9 900 000	620 000	

On peut alors calculer a et b :

$$a = (-9\,900\,000) / (620\,000) = -15.9677$$

$$b = 23\,250 - 15,967 \times 400 = 29636.8$$

A l'aide d'Excel, on peut facilement vérifier ce calcul, en ajoutant au nuage de point une « courbe de tendance » qui par défaut est de type $y = ax + b$:

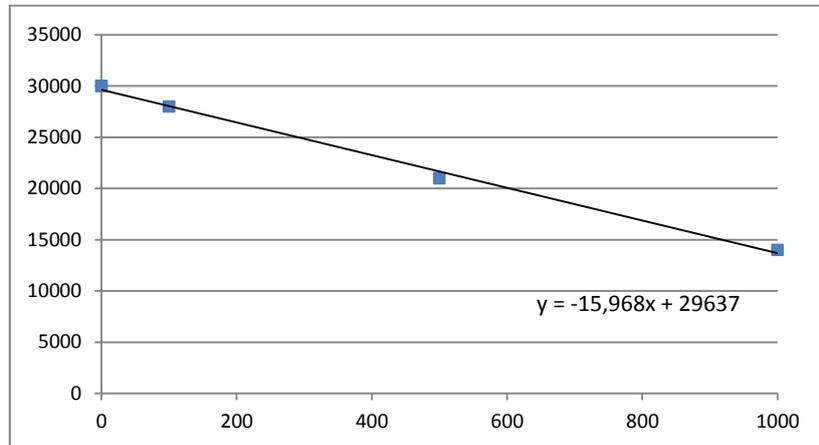


Figure 41 : Le revenu médian des ménages, leur distance au centre et la courbe de tendance.

Bien qu'utiles, ces éléments classiques de l'analyse statistique font fi de l'espace, ce qui n'est évidemment pas satisfaisant pour un géographe. Pour que ces analyses soient pertinentes, il faudrait que chaque objet soit indépendant. Or, précisément, l'espace fait sens et les objets géographiques ne peuvent généralement pas être considérés comme indépendants les uns des autres, car ils interagissent les uns sur les autres. Pour analyser le rôle de l'espace, il faut alors adapter des outils statistiques classiques ou créer des outils spécifiques.

➤ Analyse des corrélations spatiales

L'autocorrélation spatiale est une mesure de la ressemblance des valeurs prises par une variable en fonction de la localisation géographique de ces valeurs. Autrement dit, l'autocorrélation spatiale mesure l'intensité de la relation entre la proximité des lieux et leur degré de ressemblance. Chaque unité géographique élémentaire de la zone étudiée est décrite par un attribut ou plusieurs attributs et par les relations de proximité qui la lient aux autres lieux (matrice de contiguïté). Si la présence d'un attribut dans un lieu rend sa présence dans les lieux voisins plus ou moins probable, on dira que l'attribut manifeste une autocorrélation spatiale. L'autocorrélation spatiale est positive si les lieux proches ont tendance à se ressembler davantage que les lieux éloignés. Inversement, elle est négative si les lieux proches ont tendance à être plus différents que les lieux plus éloignés. L'autocorrélation est nulle quand aucune relation n'existe entre la proximité des lieux et leur degré de ressemblance.

Les coefficients d'autocorrélation spatiale sont alors construits de telle manière qu'il soit possible de répondre à la question suivante : la variation d'un caractère entre unités contiguës est-elle plus ou moins grande que la moyenne des variations observées entre l'ensemble des unités de la zone étudiée prises deux à deux ? Il existe plusieurs indicateurs

afin de mesurer l'autocorrélation spatiale. Les deux principaux, c'est-à-dire les plus couramment utilisés, sont les indices de Moran et de Geary.

- Indice de Moran

L'indice de Moran mesure le degré d'autocorrélation spatiale sous forme d'*autocovariance relative* des observations pour une variable X . La covariance relative n'est autre que le produit moyen des valeurs observées (et centrées sur la moyenne) rapporté à la variance de l'échantillon [37]. On parlera ici d'auto-covariance pour tenir compte du fait que les produits sont calculés pour une même variable, mais pour différentes observations. On aura toutefois noté l'analogie avec le coefficient de corrélation, qui rapporte la covariance entre deux variables au produit de leur écart-type. La définition classique de l'indice de Moran, appliqué à des observations i et j , dépend d'une matrice de proximité notée l_{ij} , prenant la valeur 0 partout sauf pour les i et j voisins ($l_{ij} = 1$). Quand la variable est normalisée (*moyenne* = 0 et $\sigma^2=1$), la covariance relative n'est autre que la moyenne des produits croisés des valeurs de la variable X [38].

$$M = \frac{N}{L} \times \frac{\sum_{i,j} l_{ij} (X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2} \quad [37]$$

$$M = \frac{N}{L} \times \sum_{i,j} (l_{ij} X_i X_j) \quad [38]$$

Où N représente le nombre d'objets étudiés et $L = \sum_{i,j} (l_{ij})$.

Une extension de cette formule consiste à définir différentes classes de voisinages ; la matrice $l_{ij}(d_i)$ prendra désormais la valeur 1 quand i et j seront distants de d_i . On examinera alors de manière régulière l'évolution de $I(d_i)$ de d_i à d_m (distance à laquelle l'autocorrélation devient négligeable), au moyen d'un corrélogramme. Cette écriture permet d'entrevoir des calculs par classe de distance croissante, plutôt que pour les seuls voisins (espaces directement contigus).

Les valeurs négatives (positives) de l'indice indiquent une auto-corrélation spatiale négative (positive). Ses valeurs s'étendent de -1 (indiquant une dispersion parfaite) à +1 (corrélation parfaite). Une valeur nulle correspondra à une répartition spatiale parfaitement aléatoire de la variable au sein du territoire étudié. Pour le test d'hypothèse statistique, l'indice I de Moran peut être transformé en Z-scores pour lequel les valeurs plus grandes que +1,96 ou plus petites que -1,96 indiquent une auto-corrélation spatiale significative avec un taux d'erreur de 5 %.

Le calcul de Moran est déséquilibré, car certaines observations sont plus représentées que d'autres : certaines localités centrales ont en effet plus de voisins que d'autres. On choisit alors de corriger ce biais en calculant un indice Moran corrigé du nombre de localités prises en compte.

- Indice de Geary

L'indice de Moran est relié à celui de Geary, mais n'est pas identique. L'indice de Moran est une mesure de l'autocorrélation spatiale globale, tandis que l'Indice de Geary est plus sensible à l'autocorrélation spatiale locale. L'indice de Geary se présente comme un rapport entre d'une part la variance des écarts des valeurs de X entre unités spatiales contiguës et d'autre part la variance totale de X :

$$C = \frac{(N-1)}{2L} \times \frac{\sum_{i,j} l_{ij} (X_i - X_j)^2}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2} \quad [39]$$

Pour rendre cet indice plus interprétable, on calcule $G' = 1 - G$, ce qui donne $G' = 0$ pour une autocorrélation nulle, $G' > 0$ pour une autocorrélation positive, $G' < 0$ pour une autocorrélation négative. La pratique tend à montrer que l'indice de Moran devrait être préféré à celui de Geary, du fait de sa plus grande stabilité.

Afin d'appliquer cet indicateur, prenons la répartition spatiale de différents objets géographiques caractérisés par une même variable X :

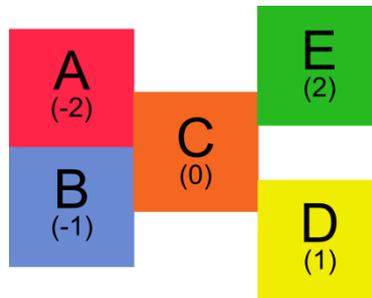


Figure 42 : Différents objets géographiques possédant différentes valeurs d'une même variable.

Tout d'abord, on peut déterminer le graphe des relations de contiguïté :

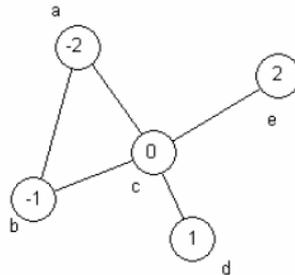


Figure 43 : Le graphe des relations de contiguïté.

La moyenne de la variable X vaut $\bar{X} = (-2 - 1 + 0 + 2 + 1)/5 = 0$ et le calcul de la variance donne le résultat suivant :

$$\sum_i (X_i - \bar{X})^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2 = 10$$

De plus, on a $N = 5$ et $W = 10$ (le nombre d'arcs multiplié par 2). Il convient dès lors de calculer pour toutes les paires d'objets contigus l'opération suivante : $(X_i - X_j)^2$. On obtient le tableau ci-dessous :

A → B	$(-2 - (-1))^2 = 1$	A → C	$(-2 - 0)^2 = 4$	B → A	$(-1 - (-2))^2 = 1$
B → C	$(-1 - 0)^2 = 1$	C → A	$(0 - (-2))^2 = 4$	C → B	$(0 - (-1))^2 = 1$
C → D	$(0 - 1)^2 = 1$	C → E	$(0 - 2)^2 = 4$	D → C	$(1 - 0)^2 = 1$
E →	$(2 - 0)^2 = 4$	Total		22	

Tableau 26 : Calculs intermédiaires pour l'indice de Geary.

A partir de ces calculs intermédiaires, on peut déterminer G :

$$G = \frac{(5 - 1) \times 22}{2 \times 10 \times 10} = 0,44$$

Ainsi, $G' = 1 - G = 0,66$. La répartition spatiale de la variable X est donc caractérisée par une autocorrélation positive.

➤ **Le quotient de localisation (une mesure locale de la concentration)**

Le quotient de localisation est un indicateur de concentration. Il donne une mesure de l'importance relative d'une modalité (ou catégorie) dans une unité spatiale, comparée à son poids dans les autres unités spatiales. Le quotient de localisation est un outil d'analyse spatiale, car il permet de caractériser le degré de concentration d'une sous-population dans une unité spatiale en le comparant à toutes les autres unités spatiales d'un même ensemble territorial. Il permet de mener cette comparaison en faisant abstraction des inégalités du poids des unités spatiales et de celui des différentes catégories. Il est par exemple employé pour comparer les répartitions de différentes sous-populations entre des quartiers ou des îlots urbains, et procéder ainsi à l'étude des ségrégations spatiales (ou des spécialisations) entre ces sous-populations dans les villes ou les régions.

Soit le tableau ci-dessous (dont les colonnes peuvent représenter des communes et les lignes des types d'activité, les cases représentent le nombre d'employés) :

	C1	C2	C3	Total
B1	x11	x12	x13	x1●
B2	x21	x22	x23	x2●
B3	x31	x32	x33	x3●
Total	x●1	x●2	x●3	x●●

Tableau 27 : Un tableau de contingence.

Si $Q(x[i\tilde{j}])$ est le quotient de localisation de $x[i\tilde{j}]$ alors :

$$Q(x[ij]) = (x[ij]/x[\bullet j]) / (x[i\bullet]/x[\bullet\bullet]) = (x[ij] \times x[\bullet\bullet]) / (x[i\bullet] \times x[\bullet j]) \quad [40]$$

On obtient par exemple :

$$Q(x[21]) = (x[21]/x[\bullet 1]) / (x[2\bullet]/x[\bullet\bullet]) = (x[21] \times x[\bullet\bullet]) / (x[2\bullet] \times x[1\bullet])$$

Le quotient de localisation prend des valeurs supérieures à 0. Le point de référence se situe à 1. Si $Q(x[ij]) > 1$, le phénomène i est relativement concentré dans la zone j , autrement dit la zone j est relativement spécialisée dans l'activité i (l'activité i occupe dans la zone j une place plus importante qu'ailleurs). Si l'on est familier avec le concept statistique du tableau de contingence, le quotient de localisation peut être compris comme étant la valeur d'une case du tableau de contingence divisée par sa fréquence théorique. En effet, la fréquence théorique $F(x[ij])$ est définie comme suit:

$$F(x[ij]) = (x[i\bullet] \times x[\bullet j]) / x[\bullet\bullet] \quad [41]$$

Puisque nous avons :

$$Q(x[ij]) = (x[ij]/x[\bullet j]) / (x[i\bullet]/x[\bullet\bullet]) = x[ij] / ((x[i\bullet] \times x[\bullet j]) / x[\bullet\bullet])$$

Nous en déduisons que :

$$Q(x[ij]) = x[ij] / F(x[ij]) \quad [42]$$

A titre d'exemple, prenons le tableau de contingence ci-dessous :

Branche Zone	B1	B2	B3	Total
Z1	48	325	287	660
Z2	27	185	148	360
Z3	45	90	45	180
Total	120	600	480	1200

Tableau 28 : Emploi par zone et par branche.

Pour $Q(x[z2b1])$, on calcule :

$$Q(x[z2b1]) = \frac{27/120}{360/1200} = \frac{0,225}{0,300} = 0,75$$

Plus généralement, on obtient les quotients de localisation suivants :

Branche Zone	B1	B2	B3
Z1	0,727	0,985	1,087
Z2	0,750	1,028	1,028
Z3	2,500	1,000	0,625

Tableau 29 : Les quotients de localisation.

➤ **Mesure (générale) de l'inégalité : indice de Theil, indice de Gini.**

L'indice de Theil est une mesure générale du degré de concentration géographique d'un semis de points dénombré dans une grille spatiale. Le raisonnement repose sur la comparaison de deux distributions de fréquence avec référence à l'équirépartition d'une part et à la concentration absolue d'autre part. Historiquement, la construction de l'indice de Theil s'inspire du concept d'entropie, emprunté à la théorie de l'information. En effet, en 1967, Theil introduit un nouvel indicateur d'inégalité de revenu dérivé d'une analogie de la seconde loi de thermodynamique (la loi de l'entropie). Celle-ci mesure le désordre d'un système thermodynamique, en offrant la possibilité d'évaluer la contribution des inégalités intergroupes et intragroupes à l'inégalité totale. L'entropie est l'information espérée dans une distribution à laquelle est associée une probabilité. Theil effectue une transposition en remplaçant l'idée de probabilité, par les parts de revenu de chaque sous population calculées à partir du revenu total de la population mère.

Ainsi, en analyse spatiale, soit i une maille parmi les n que comprend la zone étudiée, m_i le nombre de points que cette maille concentre parmi les m points de la zone. On se place ici dans la situation la plus simple, qui est celle d'un dénombrement des points du semis dans une grille spatiale régulière. n_i est le nombre de mailles de population m . Le nombre moyen de points regroupés dans une maille étant égal à m/n et :

$$\sum_i n_i m_i = m \quad [43]$$

Avec $m_i/m = g_i$ et $n_i/n = f_i$, on a :

$$T = \sum_i g_i \times (\log(g_i / f_i)) = \sum_i g_i \times (\log(g_i) - \log(f_i)) \quad [44]$$

Cet indice tend vers 0 quand la concentration est minimale et tend vers $-\log(f_i)$ quand la concentration est maximale $g_i = 1$ et si $i \neq 1$ $g_i = 0$.

Plus généralement, cet indice se calcule pour toute distribution d'une variable quantitative. Prenons alors un exemple très simple. Soit trois revenus : 1 euro ; 1 euro ; 7 euros. On a alors : $g_1 = 1/9$; $g_2 = 1/9$; $g_3 = 7/9$. Pour les fréquences : $f_1 = f_2 = f_3 = 1/3$. A partir de ces éléments, on peut calculer l'indice de Theil :

$$T = 1/9 \ln(1/3) + 1/9 \ln(1/3) + 7/9 \ln(7/3)$$

Pour des revenus de 3 euros ; 3 euros ; 3 euros. On obtient $T = 0$.

A noter que l'indice de Theil permet de décomposer les inégalités. Cette propriété permet de distinguer les inégalités inter-régionales des inégalités intra régionales.

On ne peut évoquer l'indice de Theil sans évoquer l'indice de Gini. Le coefficient de Gini est originellement une mesure du degré d'inégalité de la distribution des revenus dans une société. Cette mesure a été développée par le statisticien italien Corrado Gini. Le coefficient de Gini est un nombre variant de 0 à 1 où 0 signifie l'égalité parfaite (tout le monde a le même revenu) et 1 signifie l'inégalité totale (une personne a tout le revenu et les autres n'ont rien). Le coefficient de Gini se calcule par rapport à la fonction (dont la représentation graphique est la courbe de Lorenz) qui associe à chaque part de la population (ordonnée par

revenu croissant) la part que représente ses revenus. Ce coefficient estime alors l'inégalité en mesurant l'écart entre la courbe de Lorenz et une courbe représentant une répartition égale des revenus. Plus précisément, le coefficient de Gini est égal à la différence entre 1 et le double de l'intégrale de la fonction représentée par la courbe de Lorenz [45]. En pratique, on ne dispose pas de cette fonction, mais du revenu par « tranches » de la population. Ainsi, pour n tranches, le coefficient de Gini s'obtient par la formule de Brown :

$$G = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k) \quad [45]$$

où X est la part cumulée de la population possédant un certain revenu et Y la part cumulée du revenu.

Par exemple, prenons le jeu de données ci-dessous qui résume la répartition des salaires mensuels dans une société. :

Salaire mensuel	Effectif de la classe i : n_i
[500 ; 1500[50
[1500 ; 2500[125
[2500 ; 5500]	25

Tableau 30 : Répartition des salaires mensuels dans une société.

A partir de ce tableau, on peut calculer les fréquences cumulées des salaires mensuels.

Salaire mensuel	Effectif	Fréquence	Fréquence cumulée
[500 ; 1500[50	$50/200 = 0.25$	0.25
[1500 ; 2500[125	$125/200 = 0.625$	0.875
[2500 ; 5500]	25	$25/200 = 0.125$	1

Tableau 31 : Calcul des fréquences cumulées des salaires mensuels (par classe).

De même, on peut calculer les fréquences cumulées de la masse salariale.

Salaire mensuel	Effectif	Centre de la classe	Masse salariale	Pourcentage masse salariale	Fréquence cumulée
[500 ; 1500[50	1000	50 000	0.125	0.125
[1500 ; 2500[125	2000	250 000	0.625	0.75
[2500 ; 5500]	25	4000	100 000	0.25	1

Tableau 32 : Calcul des fréquences cumulées des masses salariales (par classe).

Dès lors, il est possible de représenter la courbe de Lorenz, avec en abscisse les fréquences cumulées des salaires mensuels et en ordonnée les fréquences cumulées des masses salariales.

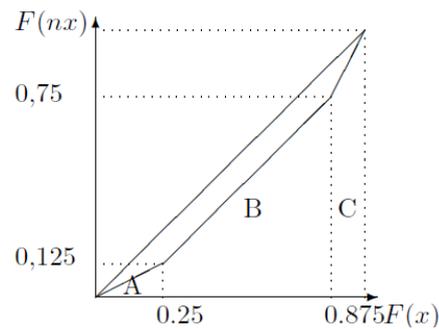


Figure 44 : La courbe de Lorenz.

Pour déterminer le coefficient de Gini, il faut calculer l'aire du triangle A et des trapèzes B et C :

$$\text{Aire A} = \frac{0,25 \times 0,125}{2} = 0,0156$$

$$\text{Aire B} = \frac{(0,875 - 0,25) \times (0,125 + 0,75)}{2} = 0,2734$$

$$\text{Aire C} = \frac{(1 - 0,875) \times (0,75 + 1)}{2} = 0,1094$$

On obtient alors :

$$G = 1 - 2 \times (0,0156 + 0,2734 + 0,1094) = 0,2032$$

Comme 0,2032 est une valeur faible, la concentration des salaires est plutôt faible, on peut donc en déduire que les salaires sont assez bien répartis dans cette entreprise.

La théorie des graphes et l'analyse de réseaux

Les réseaux (techniques ou sociaux) tiennent une place particulière en géographie. En effet, il n'existe pas de territoire sans réseau. L'étude des réseaux constitue donc un point très important de l'analyse spatiale. En géographie, l'étude des réseaux vise à expliciter les relations existant entre des lieux au préalable disjoints et à considérer que ces lieux ne sont pas des éléments indépendants.

Un graphe $G = (N ; L)$ se définit mathématiquement comme un ensemble fini de sommets N et de liens L . Le nombre d'éléments dans N et L est respectivement noté N (ou e) et K (ou v). Un graphe se définit par son ordre qui correspond au nombre de sommets et par sa taille qui est définie par le nombre de liens. Ainsi, la modélisation d'un réseau, qui comporte des éléments de natures diverses formant un système plus ou moins complexe, sous la forme d'un graphe, qui n'est qu'un simple ensemble de nœuds et d'arcs, n'est pas une opération neutre. La représentation d'un graphe peut se faire de deux manières équivalentes : soit par un schéma soit par un tableau (comme la matrice d'adjacence). Dans les faits, la représentation sous forme de schéma n'est utilisée que pour représenter les résultats des analyses. L'analyse de réseaux se focalise sur l'analyse et la manipulation de la matrice d'adjacence qui représente les nœuds directement reliés par un 1 et les autres par un 0.

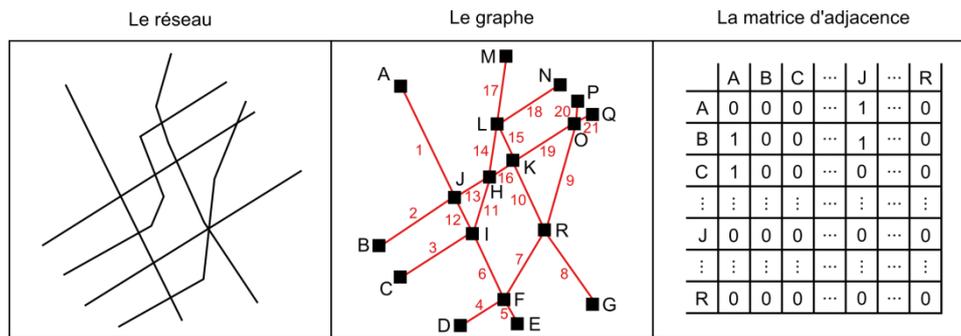


Figure 45 : Les notions de « réseau », de « graphe » et de « matrice d'adjacence ».

Le fait de prendre en compte ou non la direction des liens caractérise la différence entre un graphe orienté et un graphe non orienté. Si le graphe est non orienté, la matrice d'adjacence correspondante est symétrique. De surcroît, on distingue aussi deux types de graphes en fonction de la nature des liens : les graphes binaires (ou booléens) où les liens traduisent l'existence d'une relation entre deux sommets ; les graphes valués (pondérés) où les liens traduisent la présence et l'intensité (la distance ; le poids) de la relation.

Pour compléter un peu le vocabulaire, un sommet a est dit incident à un lien l lorsqu'une des extrémités de l est a . Si l'autre extrémité de l est un sommet b , on dit que a et b sont adjacents ou voisins (d'où le terme de matrice d'adjacence...). La distance la plus courte mesurée en nombre de liens entre deux sommets est nommée distance géodésique (à ne pas confondre avec la distance géographique pour un graphe valué). On appelle chaîne un parcours sur un graphe non orienté allant d'un sommet à un autre en empruntant des arêtes, lorsque le graphe est orienté, on utilise le terme chemin. Une chaîne (ou un chemin) est dite élémentaire si chaque sommet y apparaît au plus une fois. Lorsque le départ et l'arrivée de cette chaîne (ou de ce chemin) élémentaire est le même sommet, on parle de cycle (graphe non orienté) ou de circuit (graphe orienté). Un graphe est dit connexe lorsqu'il existe un chemin ou une chaîne entre toutes les paires de sommets.

Certaines propriétés des graphes méritent d'être citées car elles connaissent de nombreuses applications. Un graphe eulérien désigne un graphe pour lequel il existe une chaîne passant une fois (et une seule fois) par tous les liens du graphe. Dans un graphe hamiltonien, il existe un cycle passant par tous les sommets du graphe.

Historiquement, un certain nombre de mesures permet de résumer de façon relativement simple la structure d'un réseau donné. Ces mesures sont très diverses car chacune décrit seulement une partie de la structure d'ensemble. Une seule mesure ne suffit donc pas à conclure sur la nature d'un graphe. Les mesures de la théorie des graphes sont parfois jugées non robustes, car elles sont uniquement fondées sur le nombre de nœuds et de liens. Ces mesures peuvent donc fournir des résultats identiques pour deux graphes dont la morphologie diffère voire s'oppose. Cela explique sans doute pourquoi ces mesures ne sont quasiment pas utilisées par les physiciens, qui tentent par tous les moyens d'en proposer des nouvelles.

De manière générale, il est important de connaître la taille d'un réseau ainsi que sa répartition, ce qui permet de décrire sa structure. On parle de mesures globales. Ainsi, la taille d'un réseau se mesure en nombre de sommets (e) et de liens (v), ainsi que par le diamètre (le diamètre c'est le plus long des plus courts chemins géodésiques) et le nombre de composants connexes (p). Dans le cas d'un réseau valué, et selon les informations disponibles, la longueur et le poids des liens peuvent être additionnés pour renseigner la taille du réseau. D'autres indicateurs classiques sont très utilisés en géographie des transports : les indicateurs α et β mesure ainsi la connexité du graphe (lorsqu'il existe qu'un seul passage pour relier les sommets d'un réseau, les liens peuvent constituer des enjeux stratégiques, en revanche la multiplicité des liens rend cette déconnexion plus difficile, c'est le niveau de connexité) ; l'indice γ mesure la connectivité.

$$\text{Nombre cyclomatique} = u = e - v + p \quad [46]$$

$$\text{Indice } \alpha = \frac{u}{2v-5} \quad [47]$$

$$\text{Indice } \beta = \frac{e}{v} \quad [48]$$

$$\text{Indice } \gamma = \frac{e}{3(v-2)} \quad [49]$$

Plus particulièrement, certains indicateurs mesurent des propriétés plus locales. Néanmoins, en calculant les moyennes de ces indicateurs, il est possible d'obtenir de nouvelles mesures globales. Les mesures locales de voisinage décrivent la situation d'un élément par rapport à ses voisins immédiats (directement connectés ou adjacents) et les mesures locales d'ensemble rendent compte de la situation d'un élément par rapport à tous les autres éléments de même nature présents dans le réseau. Les indicateurs de voisinage par excellence sont les mesures de degrés et les mesures de *clustering* (de transitivité). La plupart des mesures d'ensemble sont des mesures d'accessibilité. Par exemple, l'indice de Shimbel se calcule à partir d'une matrice des distances : en additionnant simplement les lignes ou les colonnes. Le sommet dont la somme est la plus faible est le sommet le plus accessible. La centralité de proximité est simplement l'inverse de l'indice de Shimbel et présente l'avantage d'être normalisée entre 0 et 1. Enfin, la centralité d'intermédiation (*betweenness*) a retenu l'attention de nombreux travaux récents. Les sommets ayant un niveau élevé de centralité d'intermédiation sont ceux qui permettent de limiter la distance à parcourir dans le réseau. Ce sont des points de passage incontournables dans une logique de plus court chemin. Leur suppression conduirait donc à ralentir le flux, puisque ce dernier devrait passer par des chemins plus longs.

$$\text{Le degré :} \quad d_i = \sum_j^N x_{ij} \quad [50]$$

$$\text{Le degré pondéré :} \quad s_i = \sum_i^N w_{ij} \quad [51]$$

$$\text{Indice de Shimbel (éloignement) :} \quad A_i = \sum_j^N d_{ij} \quad [52]$$

$$\text{Centralité de proximité :} \quad E_i = \sum_j^N \frac{1}{d_{ij}} \quad [53]$$

$$\text{Centralité intermédiaire : } C_i^B = \sum_{s,t,s \neq i}^n \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}} \quad [54]$$

$$\text{Clustering coefficient : } \rho(i) = \frac{E[\Gamma(i)]}{\frac{1}{2}d_i \times (d_i - 1)} \quad [55]$$

La simulation informatique

Très clairement, les progrès récents en analyse spatiale sont fortement liés au développement de l'informatique. L'informatique offre des possibilités nouvelles en matière de simulation, mais elle offre aussi des outils pertinents pour créer des modèles. Dans ce complément de cours, nous allons introduire les automates cellulaires, les systèmes agents et la programmation orientée objet.

➤ Les automates cellulaires

Un bon exemple illustrant la puissance des outils informatiques en géographie concerne les automates cellulaires. En effet, le principe de fonctionnement des automates cellulaire est extrêmement simple. Et pourtant, ils permettent de simuler des processus complexes comme les dynamiques urbaines. Un automate cellulaire est une grille régulière de « cellules » chacune caractérisée par un « état ». Cet état peut alors évoluer au cours du temps. L'état d'une cellule au temps $t+1$ est fonction de l'état au temps t d'un nombre fini de cellules considérées comme « son voisinage ». À chaque nouvelle unité de temps, les mêmes règles sont appliquées simultanément à toutes les cellules de la grille, produisant une nouvelle « génération » de cellules dépendant entièrement de la génération précédente. Étudiés en mathématiques et en informatique théorique, les automates cellulaires sont à la fois un modèle de système dynamique discret et un modèle de calcul. Le modèle des automates cellulaires est remarquable par l'écart entre la simplicité de sa définition et la complexité que peuvent atteindre certains comportements macroscopiques : l'évolution dans le temps de l'ensemble des cellules ne se réduit pas (simplement) à la règle locale qui définit le système.

Le « jeu de la vie » est un automate cellulaire bien connu. Le jeu de la vie se déroule sur une grille à deux dimensions où les « cellules » peuvent prendre deux états distincts : « vivantes » ou « mortes ». À chaque étape, l'évolution d'une cellule est entièrement déterminée par l'état de ses huit voisins de la façon suivante :

- Une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes devient vivante (elle naît).
- Une cellule vivante possédant deux ou trois voisines vivantes le reste, sinon elle meurt.



Figure 46 : Le jeu de la vie.

En géographie, les automates cellulaires sont parfaits pour simuler des modèles de ségrégation de type « Schelling ». Ils peuvent aussi reconstituer des processus d'évolution de croissance urbaine. Tout l'enjeu est alors de déterminer les règles qui vont régir l'automate.

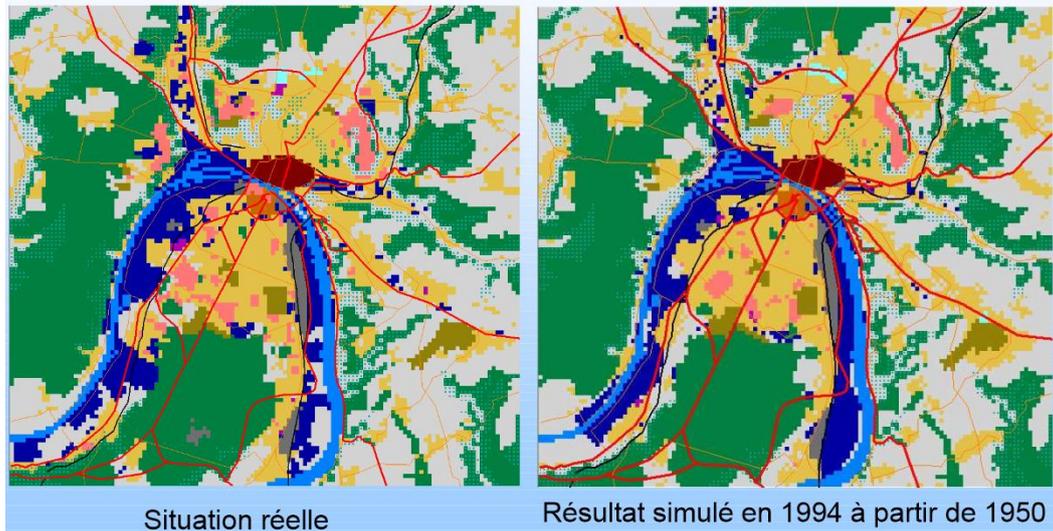


Figure 47 : Un automate cellulaire reproduisant les dynamiques urbaines (Langlois, 2010).

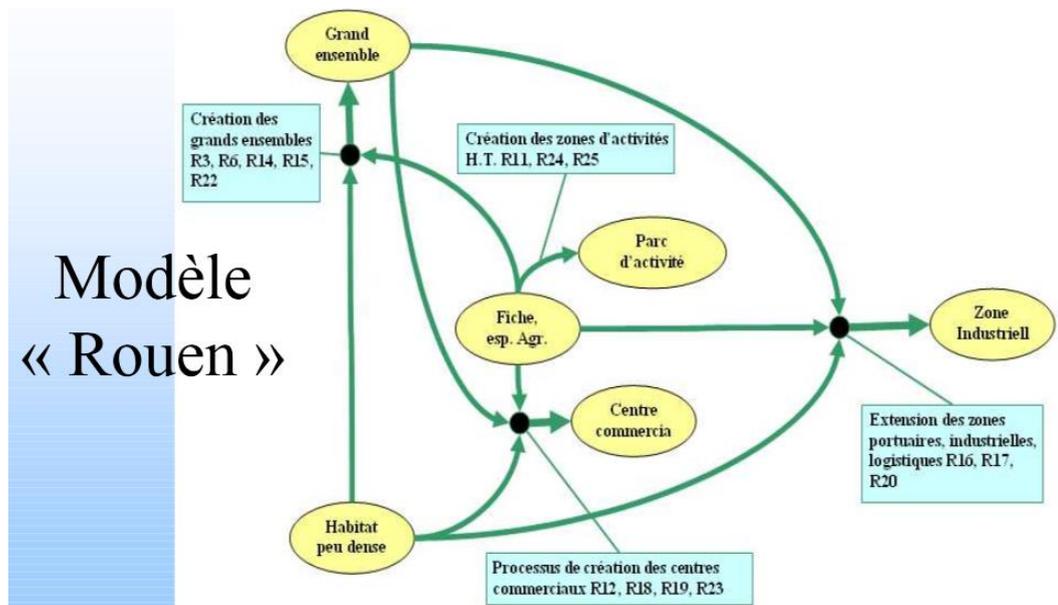


Figure 48 : Le modèle d'un automate cellulaire (Langlois, 2010).

De nombreux logiciels permettent d'implémenter des automates cellulaires. A titre d'exemple, le logiciel SpaCelle, développé par le laboratoire Thema, permet d'implémenter simplement des automates cellulaires. Le jeu de la vie est ainsi assez simple à implémenter dans SpaCelle. Le programme dans sa version 5 nécessite de définir plusieurs grands paramètres. Les paramètres généraux d'environnement qui définissent la forme des cellules (carré ou hexagonal), la topologie (voisinage de Moore ; Manathan), la taille des cellules, la

fonction d'évaluation (uniforme ; inverse de la distance...), le nombre de colonnes et de lignes, le nombre d'états...

```

topo=1
formeCell=0
topo=1
fctEval=0
alpha=1.000000
mode=0
univers=0
nc=10
nl=10
nEtats=2
nCch=1
x0=0.000
y0=0.000
tailleCell=1.000
NoData=255

```

De surcroît, il faut ajouter des informations sur les états (notamment leur nom, leur couleur et leur type), les couches, les durées de vie, les règles et la matrice d'états.

```

Etats
001921921920M Mort
01255000V Vivant

couches
00 2TCoucheCells C0 Jouvie 10 0.500

0 Durées de vie

2 Règles
M>V=Nv (V; 1 ; 3)
V>M=SV (V; 1 ; 2 ; 3)

TCoucheCells0C0
0000000000
0000010000
0000010000
0000010000
0000000000
0000000000
0011100000
0000000000
0000000000
0000000000

```

Le fichier défini peut être « enregistré » en lui affectant une extension « .ac5 ». Après avoir lancé le logiciel SpaCelle, vous pouvez ouvrir le fichier que vous venez de créer en cliquant sur « Fichier → Ouvrir ». L'automate cellulaire s'ouvre (Figure 49).

En cliquant sur le bouton , il est possible de lancer une itération. Lors de cette itération les cellules ont changé d'état, car certaines cellules sont nées et d'autres sont mortes. Si vous refaites une itération, vous revenez à l'état initial (Figure 50).

Enfin, il est possible d'effectuer plusieurs itérations en cliquant sur le bouton . Vous pouvez alors constater que l'on a produit un automate cellulaire qui tourne en rond. Bien que les automates cellulaires permettent de simuler certains processus, il est évident que ceux-ci

ne peuvent pas simuler de tous les processus complexe. La programmation orientée objet offre des possibilités beaucoup plus grandes en la matière.

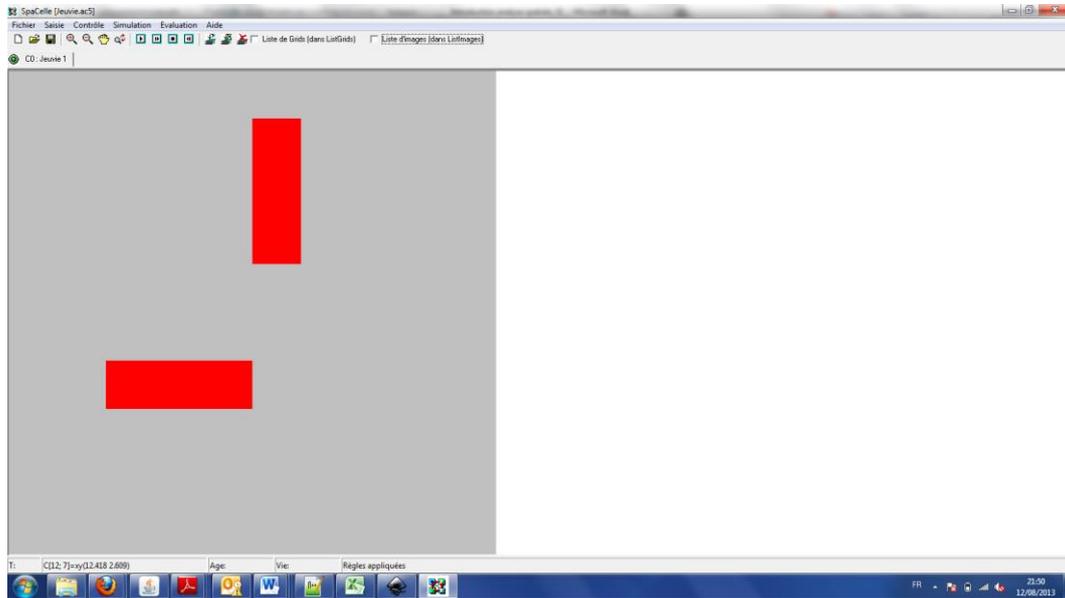


Figure 49 : L'automate cellulaire développé correspondant au jeu de la vie.

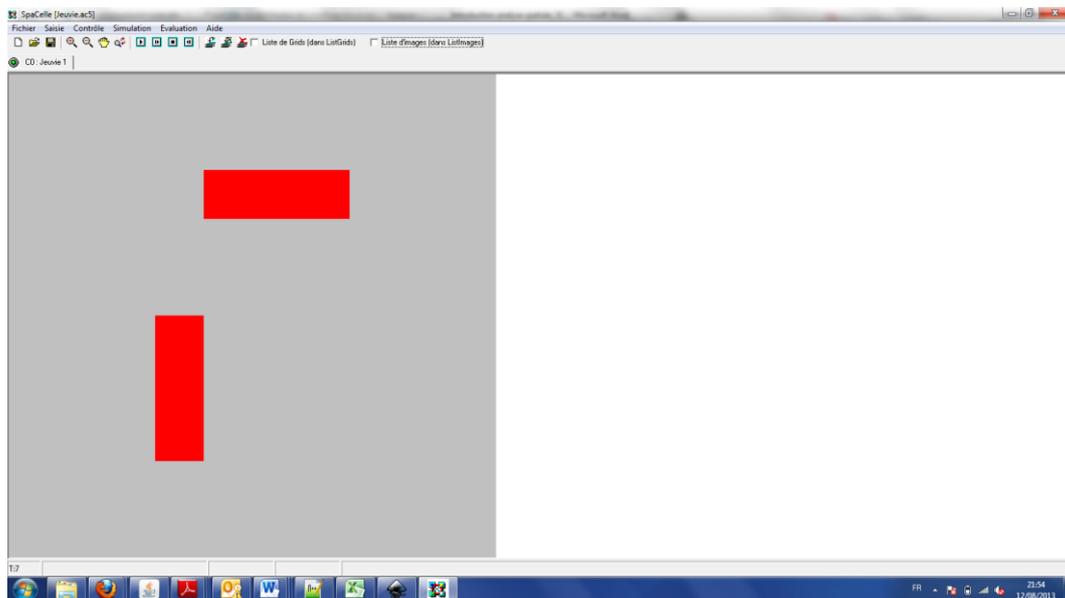


Figure 50 : L'automate cellulaire développé après une première itération.

➤ **La programmation orientée objet**

Les premiers ordinateurs étaient programmés à l'aide de cartes perforées, les instructions étant données sous la forme de 0 ou de 1 qu'il fallait rentrer manuellement. Les programmeurs devaient se confronter directement au langage machine, c'est-à-dire au langage brut que comprend la machine. Au milieu des années 1950 apparurent les premiers langages de programmation, dont l'objectif primordial était de détacher le programmeur du

langage machine. Depuis, les programmes sont écrits dans un dialecte relativement compréhensible respectant une syntaxe et une grammaire stricte et précise. Comme les langages furent développés essentiellement par des anglos-saxons, on pourrait les qualifier de langue anglaise très simplifiée.

Tandis que le langage machine est, par nature, très lié à l'électronique de l'ordinateur, le développement des langages de programmation a ouvert la voie à l'abstraction, principe fondamental qui cherche à éloigner autant que possible le programmeur des contingences matérielle pour le rapprocher des concepts et des choses concrètes qu'il doit traiter. Ainsi, il existe différents paradigmes de programmation. Un langage de programmation est dit de bas niveau lorsque le codage de celui-ci se rapproche du langage machine (dit "binaire"), et permet donc de programmer à un degré très avancé. Les langages de bas niveau sont à opposer aux langages de haut niveau, qui permettent de créer un programme sans tenir compte de la façon dont fonctionne le matériel de l'ordinateur censé exécuter le programme. A chaque évolution, l'objectif est de permettre la meilleure représentation informatique impossible, la plus intuitive possible sur laquelle opère le programme.

De surcroît, il est important de faire la différence entre les langages interprétés (Python) et compilés (C++). Les programmes interprétés ne sont pas directement exécutés par l'ordinateur mais plutôt par un interpréteur. Grossièrement, l'interpréteur lit les instructions du programme et les transforme en instructions destinées à la machine. L'interpréteur est donc toujours nécessaire pour exécuter un programme en langage interprété. Les programmes écrits dans un langage compilé doivent subir une phase intermédiaire, la compilation, à l'issue de laquelle on obtient un fichier directement exécutable par la machine. La compilation est effectuée par un compilateur, qui n'est alors plus nécessaire dès que le fichier exécutable a été produit.

En termes de paradigme, nous allons dans ce complément de cours nous intéresser à la programmation orientée objet. En effet, la programmation orientée objet est aujourd'hui un des paradigmes les plus répandus. Il consiste en la définition et l'interaction de briques logicielles appelées objets ; un objet représente un concept, une idée ou toute entité du monde physique, comme une voiture, une personne ou encore une page d'un livre. Cet objet possède une structure interne et un comportement, et il sait communiquer avec ses pairs. La communication entre les objets via leurs relations permet de réaliser les fonctionnalités attendues.

Plus précisément, qu'est-ce qu'un objet ? Il s'agit avant tout d'un mécanisme d'abstraction qui repose sur un principe fondamental. La chose manipulée par le programme est plus que la simple collection de ses caractéristiques. Pour modéliser cette chose, il faut alors prendre en compte des méthodes. Une voiture ce n'est pas seulement une vitesse et du carburant, c'est aussi une consommation de carburant en fonction de la vitesse du véhicule. Ainsi, si j'attribue une vitesse à une voiture, automatiquement je suis amené à modifier la variable carburant selon la méthode consommation (on parle d'encapsulation). De plus, les caractéristiques définissant une voiture peuvent être modifiées pour définir une moto, ces véhicules dérivent donc d'une même classe, celle des véhicules (on parle d'héritage)...

Python est un langage orienté objet de haut niveau interprété très répandu, bénéficiant de nombreuses bibliothèques et d'une communauté importante de développeurs et d'utilisateurs. Il est réputé pour être facile d'accès. Il est notamment très utilisé par les scientifiques. Pour apprendre à bien programmer en Python et bénéficier ainsi de toute la puissance de la programmation orientée objet, je vous conseille l'initiation à la programmation avec Python et C++ de Yves Bailly. Dans ce complément de cours, nous allons présenter succinctement ce langage afin d'utiliser une bibliothèque d'analyse spatiale développée en Python.

Python est un langage qui peut être utilisé dans de nombreux contextes et s'adapter à tout type d'utilisation grâce à des bibliothèques spécialisées à chaque traitement. Il est cependant particulièrement utilisé comme « langage de script » afin d'automatiser des tâches simples mais fastidieuses. Python a été conçu pour être un langage lisible. Il vise à être visuellement épuré. Ainsi, il utilise des mots anglais là où d'autres langages utilisent fréquemment de la ponctuation, et possède également moins de constructions syntaxiques que de nombreux langages structurés tels que C, Perl, ou Pascal. Les commentaires sont indiqués par le caractère croisillon. De plus, les blocs sont identifiés par l'indentation (*ie.* l'ajout de tabulations ou d'espaces dans un fichier texte), au lieu d'accolades comme en C ou C++ ; ou de `begin ... end` comme en Pascal. Une augmentation de l'indentation marque le début d'un bloc et une réduction de l'indentation marque la fin du bloc courant. Dès lors, Python requiert une rigueur dans l'écriture des scripts, c'est donc un langage pédagogique obligeant à ne pas coder « vulgairement ». Ainsi, une ligne correspond à une commande et une colonne correspond à un niveau.

Commençons par introduire l'affectation qui se fait à l'aide du signe égalité :

```
| >>> a=2  
| >>> b=3
```

L'ensemble des opérations mathématiques s'effectue simplement. Pour afficher le résultat d'une opération il faut avoir recours à la commande « `print` » :

```
| >>> e=a+b  
| >>> print e  
| 5
```

Attention, la division réserve des surprises, car par défaut Python effectue une division entière :

```
| >>> e=a/b  
| >>> print e  
| 0
```

Pour obtenir, la valeur généralement attendue, il faut utiliser la commande « `float()` » :

```
| >>> e=a/float(b)  
| >>> print e  
| 0.6666666666667
```

Les objets couramment utilisés en Python sont les chaînes de caractère et les listes. L'opérateur « `+` » permet alors de concaténer ces objets :

```
| >>> a="tr"  
| >>> print a
```

```

tr
>>> b=2
>>> e=a+b
Traceback (most recent call last):
File "<input>", line 1, in <module>
TypeError: cannot concatenate 'str' and 'int' objects
>>> b=str(b)
>>> print(b)
2
>>> e=a+b
>>> print e
tr2
>>> liste=[1,2]
>>> print liste
[1, 2]
>>> liste=liste+[4,5,6]
>>> print liste
[1, 2, 4, 5, 6]
>>> print liste[4]
6
>>> print liste[0]
1

```

Enfin, les boucles s'exécutent de cette manière :

```

>>> for i in range(3) :
... print i
...
0
1
2

```

Pour plus d'informations, il existe d'excellentes introductions : http://www.larsen-b.com/static/intro_python/ ; <http://tdc-www.harvard.edu/Python.pdf>.

Ici, nous allons nous limiter à une application d'analyse spatiale. Pour cela, nous allons utiliser la bibliothèque d'analyse spatiale Pysal⁴. Avant d'installer Pysal, il bien sûr avoir installé au préalable une version de Python (<http://www.python.org/download/>), mais il faut aussi avoir installé les bibliothèques Numpy et Scipy⁵. Tous ces téléchargements (et ces installations) peuvent paraître fastidieux. Néanmoins, ils traduisent précisément la force de Python qui est un langage disposant de nombreuses bibliothèques.

A l'aide de Pysal, nous allons maintenant chercher à déterminer, s'il existe une autocorrélation spatiale concernant les homicides dans la région de Saint-Louis (aux États-Unis) de 1988 à 1993. La représentation cartographique (classification effectuée à partir des seuils naturels de Jenks) semble laisser apparaître une autocorrélation spatiale positive, mais ce n'est pas si évident (Figure 51).

Pour calculer les indices de Geary et de Moran, il convient simplement de taper le code suivant :

```

>>> Import pysal
>>> f = pysal.open(pysal.examples.get_path("stl_hom.dbf"))
>>> y = np.array(f.by_col['HR8893'])
>>> w = pysal.open(pysal.examples.get_path("stl.gal")).read()

```

⁴ <http://code.google.com/p/pysal/downloads/list>

⁵ <http://www.scipy.org/scipylib/download.html>

```

>>> gc = pysal.Geary(y, w)
>>> gc.C
0.59712821589368859
>>> mi = pysal.Moran(y, w)
>>> mi.I
0.24365582621771659

```

Les indices de Moran et de Geary ont des valeurs positives, il semble donc qu'il y ait « autocorrélation spatiale ».

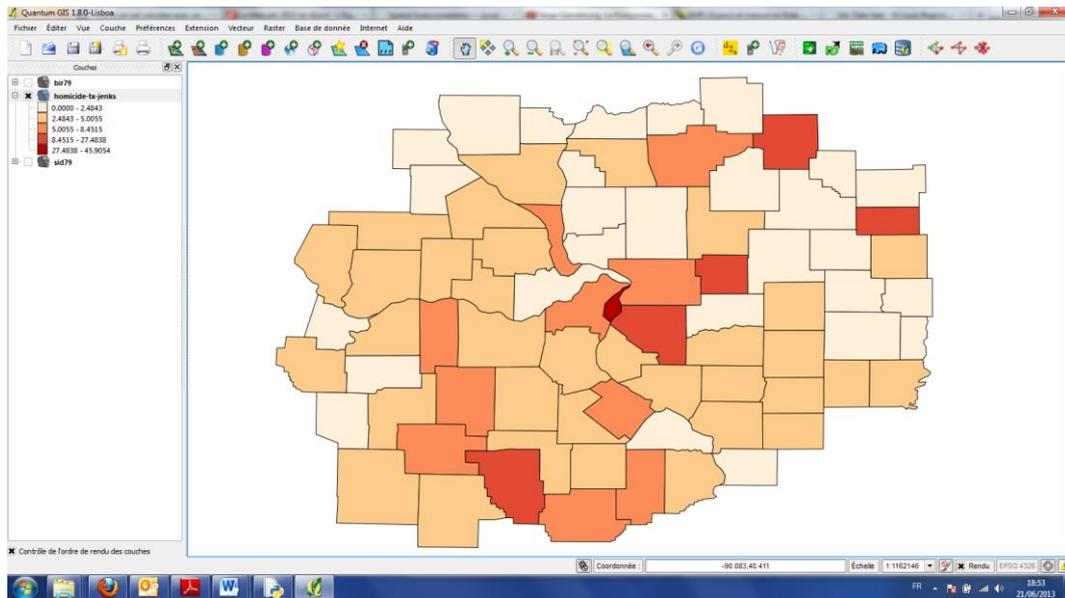


Figure 51 : Affichage des homicides dans la région de Saint-Louis à l'aide de QGIS.

La programmation orientée objet peut être jugée un peu contraignante à apprendre. Développer des simulations requiert ainsi un investissement important si l'on ne connaît pas un langage de programmation et ses bibliothèques. Les systèmes agents peuvent alors représenter une alternative, car des applications permettent de les programmer facilement.

➤ Les systèmes agents

Les concepts « d'agent » et de « système multi-agents » appartiennent au domaine de l'Intelligence Artificielle. Le concept d'agent est une extension du concept d'objet (au sens de la programmation orientée objet) utilisé en informatique. Un agent peut être défini comme un objet poursuivant un but. Pour ce faire, un agent dispose d'une certaine autonomie d'action. Il est ainsi capable d'interagir avec les autres agents du système. Depuis le milieu des années 1990, la simulation informatique et les méthodes individu-centrées connaissent de nombreux développements dans les sciences sociales. Ces méthodes offrent la possibilité de modéliser les comportements et les interactions au niveau des entités élémentaires (des individus) d'un système afin de simuler la dynamique d'un phénomène à un niveau supérieur. Il s'agit ainsi de comprendre comment des dynamiques et des régularités présentes à un niveau global d'observation peuvent émerger des interactions qui se produisent à un niveau jusqu'ici mis de côté par les méthodes classiques de modélisation, le niveau local. Mais il s'agit également d'explorer les effets de ces phénomènes émergents sur l'évolution des

comportements individuels : il ne suffit plus d'observer de manière distincte l'univers collectif et l'univers individuel, il peut être pertinent d'étudier les relations entre les deux.

Par exemple, la diffusion est liée à un ensemble d'actions pouvant conduire à diverses trajectoires : du succès à l'échec. L'objectif est alors de construire des modèles capables de générer cette diversité des futurs possibles, rompant ainsi avec une tradition de modélisation des seuls succès de diffusion. Dans ce contexte, on pose l'hypothèse qu'en se situant au niveau des entités élémentaires, c'est-à-dire au niveau des unités décisionnelles de base, il est possible de proposer ce type de modèle. On postule ainsi que la répétition de processus plus ou moins élaborés au niveau individuel a une incidence sur le devenir de la diffusion à un niveau global, à la fois dans les taux de propagation, leurs distributions spatiales et la vitesse de diffusion de l'innovation. Il reste alors à décrire les éléments qui paraissent jouer un rôle essentiel au niveau local pour rendre compte de possibles observations à un niveau global.

Or, un SMA est un programme informatique composé d'agents, c'est-à-dire d'entités informatiques autonomes capables d'agir sur elles-mêmes et sur leur environnement. Dans un univers multi-agents, l'agent peut communiquer avec d'autres agents et se déplacer. Son comportement est alors la conséquence de ses observations, de ses compétences et des interactions avec les autres agents. Le temps est directement intégré sous la forme d'une horloge qui rythme les séquences d'actions des agents.

Selon une problématique de diffusion appréhendée au travers d'une modélisation multi-agents, il est possible de poser l'hypothèse que l'hétérogénéité des situations spatiales et sociales et la diversité des comportements individuels sont les principaux moteurs des dynamiques de propagation. Dans ce contexte, la compétence d'un agent relève en partie de son aptitude à innover, ses connaissances relèvent en partie de ses observations et tout ceci est lié aux nombreuses interactions et communications qu'il entretient avec les autres agents. Cette diversité des situations doit permettre de décrire et expliquer des phénomènes que l'on observe généralement à un niveau agrégé. Les SMA offrent également la possibilité de réintroduire de la réciprocité entre une approche micro et une approche macro, car si les individus sont à l'origine des structures sociales et spatiales, celles-ci peuvent contraindre en retour le comportement de ces individus.

Pour prendre un exemple simple, nous allons utiliser Netlogo qui est un logiciel vraiment simple permettant de développer des systèmes agents. Ainsi, nous allons créer des moutons (un peu idiots) qui se déplacent de manière aléatoire et cherchent seulement à manger pour survivre et se reproduire. Néanmoins, plus les moutons sont nombreux, plus ceux-ci consomment la ressource en herbe, plus celle-ci est difficile à trouver. Un système de régulation tend alors à faire diminuer le nombre de moutons qui meurent de faim, car dans leur déplacement aléatoire ils ne trouvent plus d'herbe pour se nourrir. Si ce processus de régulation est trop violent, il peut y avoir extinction de l'espèce.

Pour cela, il faut ouvrir un nouveau fichier, dans lequel il faut conserver l'interface central défini par défaut et y ajouter deux boutons. Un bouton « setup » qui permettra de créer une situation initiale et un bouton « go » qui lancera la simulation. Pour cela, il suffit de

sélectionner dans la barre des tâches l'outil « bouton » (parfois il se révèle nécessaire de cliquer sur « Add »).

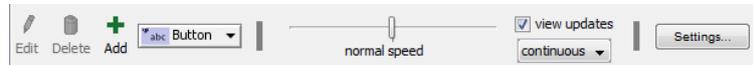


Figure 52 : Barre des tâches de NetLogo.

Dès lors, il suffit de positionner les boutons où l'on souhaite sur l'interface à l'aide d'un simple clic. Une fois positionnée, il est possible de les éditer car une boîte de dialogue s'ouvre automatiquement (sinon il est possible de faire un clic droit sur le bouton et de cliquer sur « Edit »). Remplissez les deux boîtes de dialogue de la manière suivante :

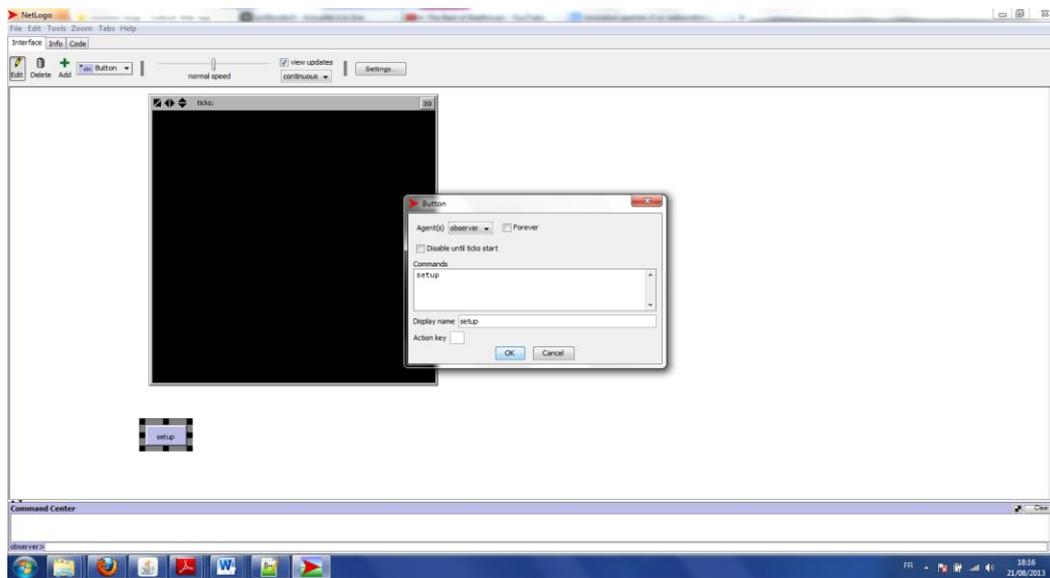


Figure 53 : Edition d'un bouton « setup » dans NetLogo.

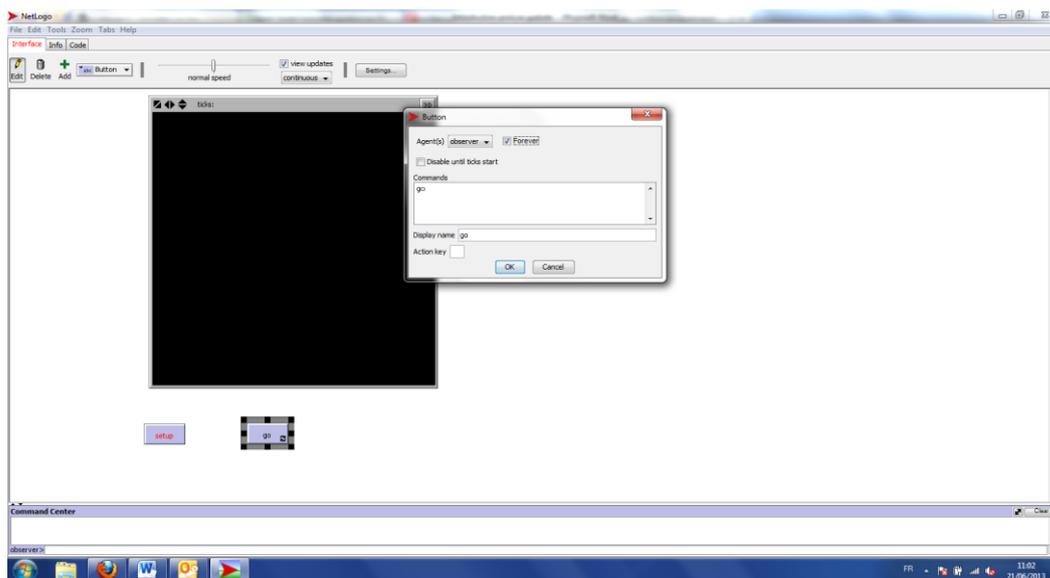


Figure 54 : Edition d'un bouton « go ».

Pour que les itérations soient automatiques, cochez la case « forever » lors de l'édition du bouton « go ». Les boutons apparaissent en rouge, car ils n'implémentent aucune action. Pour l'initialisation, tapez le code ci-dessous. Premièrement, ce code qui nettoie tout, puis crée cinq « turtles », en l'occurrence des moutons rouges qui sont répartis de manière aléatoire dans la grille. Enfin, ce code remplit de vert toutes les cellules (ce qui représente l'herbe).

```
to setup
  clear-all
  create-turtles 5 [ setxy random-xcor random-ycor set color red ]
  ask patches [ set pcolor green ]
  reset-ticks
end
```

Les moutons vont alors se déplacer de manière aléatoire à chaque itération, ce qui leur coûte de l'énergie. Ils vont aussi chercher à manger de l'herbe, ce qui leur donne de l'énergie et provoque la diminution du stock d'herbes disponible (les cellules deviennent noires dès qu'un mouton mange de l'herbe). Nous obtenons le code suivant.

```
to move-turtles
  ask turtles [
    right random 360
    forward 1
    set energy energy - 1
  ]
end

to eat-grass
  ask turtles [
    if pcolor = green [
      set pcolor black
      set energy energy + 5
    ]
  ]
end
```

A ce rythme-là, la simulation peut tourner à l'infini car les moutons ne meurent jamais. Il faut donc programmer leur mort par manque d'énergie.

```
to check-death
  ask turtles [
    if energy < 0 [ die ]
  ]
end
```

Cette fois-ci les moutons meurent vite car la ressource est vite amenée à manquer. Il faut donc prévoir un renouvellement de la ressource qui peut se faire de manière plus ou moins aléatoire.

```
to regrow-grass
  ask patches [
    if random 100 < 1 [ set pcolor green ]
  ]
end
```

Néanmoins, si les moutons peuvent vivre plus longtemps, ils ne capitalisent pas pour autant sur leur bonne santé, le nombre de moutons ne dépassera donc jamais leur nombre initial.

Néanmoins, comme un mouton bien nourri en vaut deux, il semble nécessaire de prévoir des naissances. Ainsi, dès qu'un mouton atteint une énergie de dix, il peut donner naissance à un mouton d'énergie 5 et perd en contrepartie 5 points d'énergie (car se reproduire est très fatigant). On peut alors implémenter la fonction suivante.

```

to naissance
  ask turtles [
    if energy > 10 [
      set energy energy - 10
      hatch 1 [ set energy 5 ]
    ]
  ]
end

```

Pour lancer tous ces codes, il faut créer le code d'interaction avec le bouton « go » qui va à chaque itération appeler l'ensemble des fonctions programmées, compter le nombre d'itérations (« tick ») et arrêter le programme s'il n'y a plus de moutons (« if not any? turtles [stop] »). Il faut de plus ne pas oublier de préciser que les moutons ont une variable « energy ».

```

turtles-own [energy]

to go
  if not any? turtles [ stop ]
  move-turtles
  eat-grass
  check-death
  regrow-grass
  naissance
  tick
end

```

Voilà, le tour est joué, vous pouvez effectuer vos simulations. Pour aller plus loin, vous pouvez créer des « sliders » afin de faire varier la vitesse de repousse de l'herbe, le nombre initial de moutons, la valeur nutritionnelle de l'herbe. De même, vous pouvez créer des graphiques qui affichent la surface d'herbe et le nombre de moutons au cours du temps.

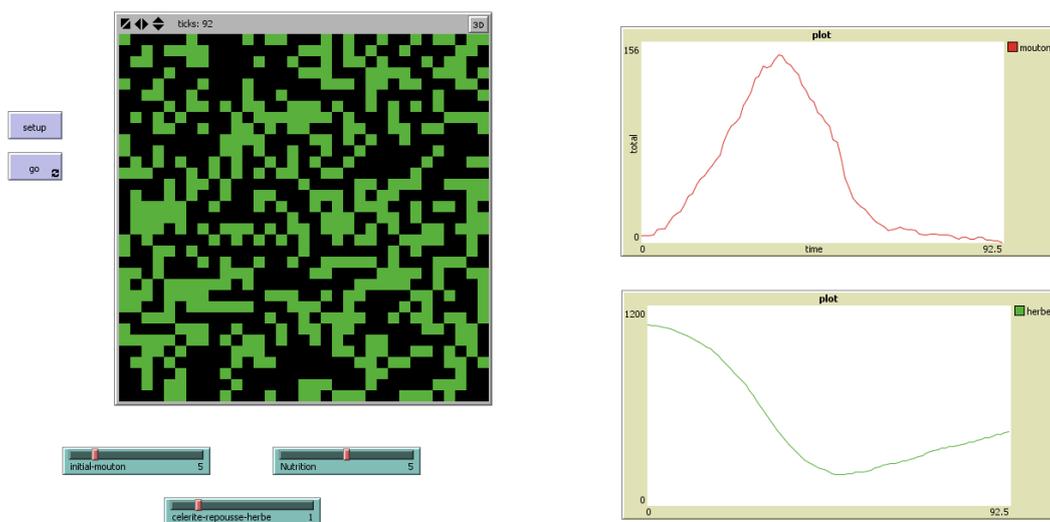


Figure 55 : Une simulation à l'aide de NetLogo.

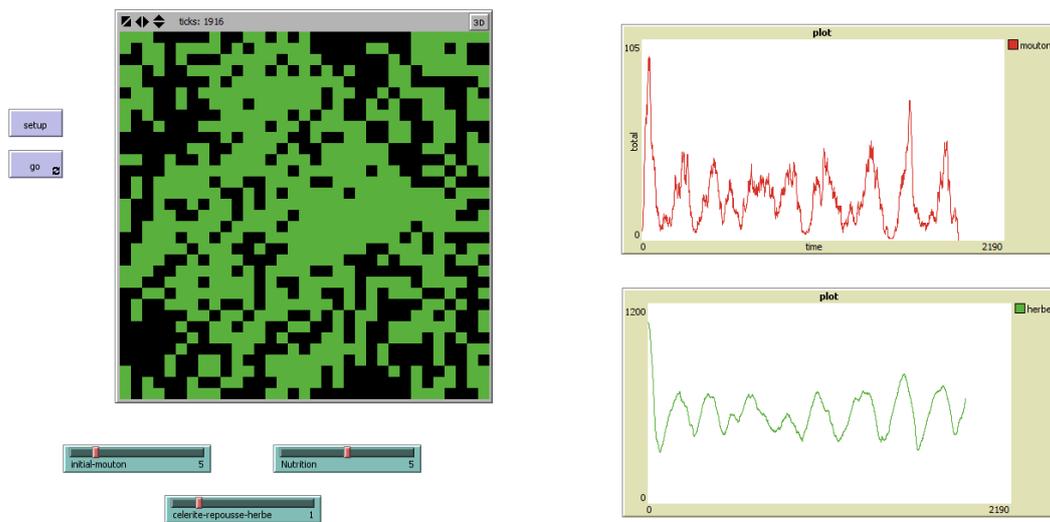


Figure 56 : Une deuxième simulation à l'aide de NetLogo.

Références

Pumain D., Saint-Julien T., *L'analyse spatiale, tome 1 : Les localisations dans l'espace*, Armand Colin, collection « Coursus », 2010.

Pumain D., Saint-Julien T., *Analyse spatiale, tome.2 : interactions spatiales*, Armand Colin, collection « Coursus », 2010.

Ciceri M.F, Marchand B., Rimbart S., *Introduction à l'analyse de l'espace*, Armand Colin, collection « U », 2010.

Bavoux J.P., *Initiation à l'analyse spatiale*, Armand Colin, 2010.

Caloz R., Collet C., Dumolard P., *Analyse spatiale de l'information géographique*, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, Science et ingénierie de l'environnement, 2011.

Bailly Y., *Initiation à la programmation avec Python et C++*, Pearson, 2011.

Drogoul A., Treuil J.P., Zucker J.D., *Modélisation et simulation à base d'agents : Exemples commentés, outils informatiques et questions théoriques*. Dunod, 2008.

Liens précieux

Généraliste

<http://www.hypergeo.eu/>

<http://www.spatial-modelling.info/>

<http://grasland.script.univ-paris-diderot.fr/>

Pour les modèles d'analyse spatiale

[http://www.univ-montp3.fr/ateliermercator/wp-](http://www.univ-montp3.fr/ateliermercator/wp-content/uploads/2010/02/ECUE2_W141TSS1_SPE_M1_0910_analyse_vecteur.pdf)

[content/uploads/2010/02/ECUE2_W141TSS1_SPE_M1_0910_analyse_vecteur.pdf](http://www.univ-montp3.fr/ateliermercator/wp-content/uploads/2010/02/ECUE2_W141TSS1_SPE_M1_0910_analyse_vecteur.pdf)

http://region-developpement.univ-tln.fr/fr/pdf/R36/1_INTRO.pdf (loi de Zipf)

<http://cybergeog.revues.org/22200?file=1> (loi de Zipf)

<http://eeea.fr/docs/ModelesInteractionSpatiale.pdf> (modèle gravitaire)

<http://www.filipponi.info/sito/2001-02/Commerces-Tessin.pdf> (Reilly et Huff)

<http://piketty.pse.ens.fr/fichiers/semina/lunch/Forse2006.pdf> (Schelling)

http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/44/01/00/PDF/These_Eric_Daude_39-03.pdf
(Hägerstrand)

<http://steconomice.uoradea.ro/anale/volume/2008/v1-international-business-and-european-integration/121.pdf> (opimisation)

Pour les statistiques

http://proba.jussieu.fr/~detiliere/Cours/polycop_Bio.pdf (analyse multivariée)

http://www.math.u-psud.fr/~stafav/IMG/pdf/Statistique_Spatiale.pdf (statistique spatiale)

<http://pbil.univ-lyon1.fr/R/pdf/bsa.pdf> (statistique spatiale)

Pour l'analyse de graphe

<http://igraph.sourceforge.net/igraphbook/igraphbook-creating.html>

<http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/>

<http://www3.nd.edu/~networks/resources.htm>

<http://halshs.archives-ouvertes.fr/FMR/>

<http://groupefmr.hypotheses.org/>

Pour les automates cellulaires

<http://www.spatial-modelling.info/Application-du-modele-de-Schelling>

<http://cybergeog.revues.org/22976>

<http://mtg.labos.univ-rouen.fr/fiches/langloisPDF/SpaCelle%20-%20%e0%20para%eetre%20dans%20L%27Espace%20G%e9ographique.pdf>

Pour les systèmes multi-agents

<http://thema.univ->

[comte.fr/theoq/pdf/conferences/TQ2005%20CONFERENCE%20DROGOUL.pdf](http://thema.univ-comte.fr/theoq/pdf/conferences/TQ2005%20CONFERENCE%20DROGOUL.pdf)