Logistique and Supply Chain

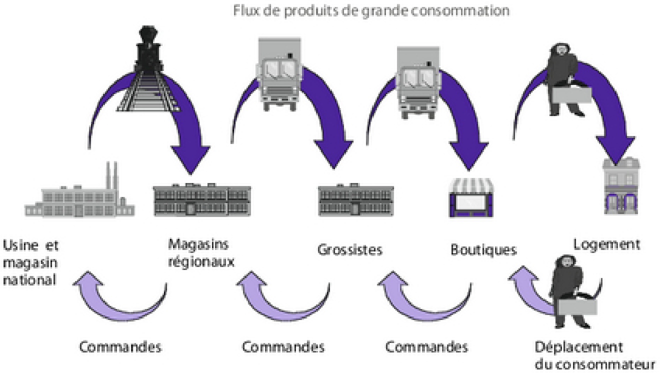
Université Paris-Est Créteil
Serge Lhomme

Maître de conférences en Géographie
http://sergelhomme.fr
serge.lhomme@u-pec.fr

8 janvier 2020

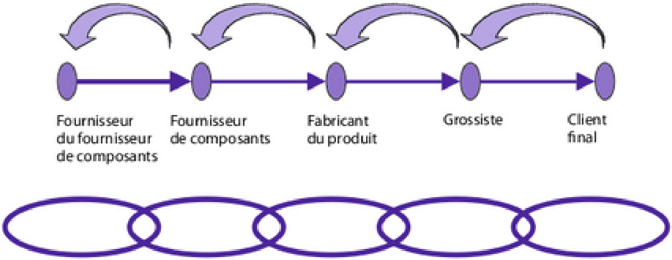
Formulations et résolutions mathématiques

Introduction : autant de formulations que de représentations de la chaîne logistique



Formulations et résolutions mathématiques

Introduction : autant de formulations que de systèmes (sous-chaîne logistique)



Formulations et résolutions mathématiques

Introduction : autant de formulations que de critères d'optimisation

Quels sont les objectifs ?

- Maximiser les profits
- Minimiser les coûts
- Minimiser les stocks
- Maximiser la production
- Minimiser le temps de transport et les délais

Formulations et résolutions mathématiques

Introduction : autant de formulations que de contraintes

Quelles peuvent être les contraintes ?

- Un nombre limité de personnels
- Des matières premières limitées
- Un matériel seulement disponible à un instant t
- Des camions à la vitesse et à la capacité limitées

Formulations et résolutions mathématiques

Introduction : autant de résolutions que de méthodes

Les problèmes issus de la chaîne logistique forment généralement des problèmes complexes (au sens mathématique et informatique du terme).

Ainsi, lorsque ces problèmes comportent un nombre relativement faible de variables, ils sont en règle générale facilement solvables et leurs solutions apparaissent alors triviales.

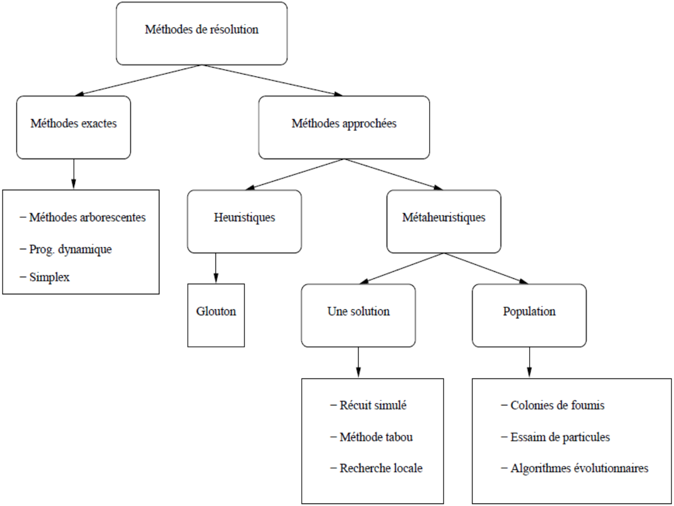
Néanmoins, dès que le nombre de variables impliquées devient important, le nombre de calculs explose et même les ordinateurs les plus puissants ne peuvent les résoudre en un temps raisonnable.

Ainsi, on distingue deux grandes familles de méthodes de résolution :

- Les méthodes exactes
- Les heuristiques (les méthodes approchées)

Formulations et résolutions mathématiques

Introduction : autant de résolutions que de méthodes



Formulations et résolutions mathématiques

Programme linéaire et logistique

On appelle programme linéaire, un problème d'optimisation d'une fonction de plusieurs variables en présence de contraintes. Le programme est dit linéaire si la fonction et les contraintes sont toutes des combinaisons linéaires de variables. Il comporte n variables non négatives, m contraintes d'égalité ou d'inégalité et la fonction-objectif à optimiser. De nombreux problèmes logistiques sont réductibles à des programmes linéaires.

Formulation mathématique

Minimiser ou Maximiser : $\sum_j C_j X_j$

En respectant les contraintes : $\sum_j A_{ij} X_j \leq$ ou $\geq B_i \ \forall i$

Formulations et résolutions mathématiques

Programme linéaire et logistique

On appelle programme linéaire, un problème d'optimisation d'une fonction de plusieurs variables en présence de contraintes. Le programme est dit linéaire si la fonction et les contraintes sont toutes des combinaisons linéaires de variables. Il comporte n variables non négatives, m contraintes d'égalité ou d'inégalité et la fonction-objectif à optimiser. De nombreux problèmes logistiques sont réductibles à des programmes linéaires.

Formulation mathématique

Minimiser ou Maximiser : $\sum_{j} C_j X_j$

En respectant les contraintes : $\sum_{j} A_{ij} X_j \leq$ ou $\geq B_i \; \forall i$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Avant de commencer avec l'algorithme du simplexe, qui permet de résoudre les programmes linéaires, il est intéressant de comprendre ce que l'on cherche à calculer. Pour cela, nous allons chercher une solution graphique à un problème relevant de la programmation linéaire.

Une entreprise peut fabriquer sur une machine donnée (travaillant 35 heures par semaine) deux produits (P1 et P2). Cette machine ne peut produire qu'un seul produit à la fois (le temps de réglage est négligeable). A l'unité, ces produits rapportent respectivement 4 euros et 12 euros.

Les rendements sont respectivement de 50, 25 unités par heure. D'après une étude de marché, la quantité de produits vendus en une semaine n'excède pas 1000 unités pour P1, 500 unités pour P2.

Que doit produire l'entreprise pour maximiser son profit ?

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Premièrement, formulons le problème sous sa forme mathématique.

Maximiser : $4X_1 + 12X_2$

Sous les contraintes :

$$X_1 \leq 1000$$

$$X_2 \leq 500$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 1750$$

$$X_1 \ , \ X_2 \geq 0$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Premièrement, formulons le problème sous sa forme mathématique.

Maximiser : $4X_1 + 12X_2$

Sous les contraintes :

$$X_1 \leq 1000$$

$$X_2 \leq 500$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 1750$$

$$X_1 \ , \ X_2 \geq 0$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Premièrement, formulons le problème sous sa forme mathématique.

Maximiser : $4X_1 + 12X_2$

Sous les contraintes :

$$X_1 \leq 1000$$

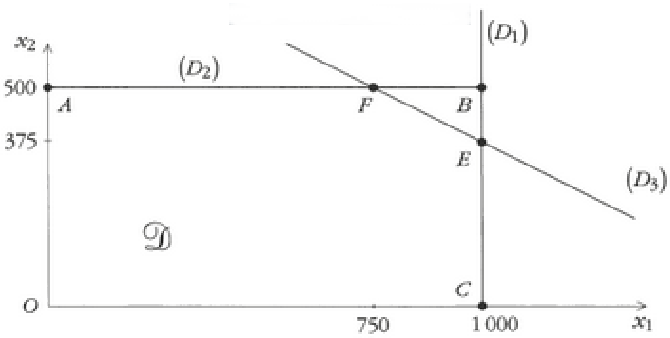
$$X_2 \leq 500$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 1750$$

$$X_1 \ , \ X_2 \geq 0$$

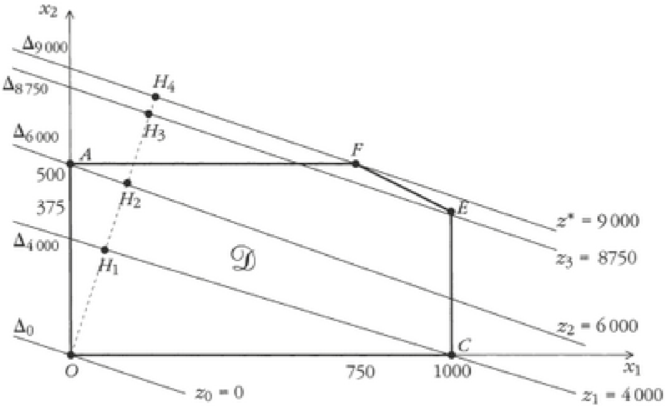
Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe



Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe



Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Trouver une solution géométrique n'est plus possible lorsque le nombre de variables est supérieur à trois, puisqu'il n'est pas possible d'effectuer une représentation graphique supérieure à trois dimensions. On doit alors avoir recours à une résolution numérique.

Une entreprise peut fabriquer sur une machine donnée (travaillant 45 heures par semaine) trois produits (P1, P2 et P3). Cette machine ne peut produire qu'un seul produit à la fois (le temps de réglage est négligeable). A l'unité, ces produits rapportent respectivement 4 euros, 12 euros et 3 euros.

Les rendements sont respectivement de 50, 25, 75 unités par heure. D'après une étude de marché, la quantité de produits vendus en une semaine n'excède pas 1000 unités pour P1, 500 unités pour P2 et 1500 unités pour P3.

Que doit produire l'entreprise pour maximiser son profit ?

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Premièrement, il faut ramener le programme linéaire à une forme standard, pour laquelle les contraintes sont mises sous la forme d'égalités et où les seconds membres sont positifs.

Ceci requiert l'introduction de nouvelles variables dites « variables d'écart » :

$$\sum_j A_{ij}X_j \leq B_i \Rightarrow \sum_j A_{ij}X_j + e_i = B_i \text{ avec } e_i \geq 0$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Premièrement, il faut ramener le programme linéaire à une forme standard, pour laquelle les contraintes sont mises sous la forme d'égalités et où les seconds membres sont positifs.

Ceci requiert l'introduction de nouvelles variables dites « variables d'écart » :

$$\sum_j A_{ij} X_j \leq B_i \Rightarrow \sum_j A_{ij} X_j + e_i = B_i \text{ avec } e_i \geq 0$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Ainsi, il faut distinguer la forme canonique et la forme standard.

Forme canonique

$$\text{Max} \sum_j C_j X_j$$

$$\sum_j A_{ij} X_j \leq B_i \ \forall i$$

$$X_j \geq 0 \ \forall j$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Forme standard

$$\text{Max} \sum_j C_j X_j$$

$$\sum_j A_{ij} X_j = B_i \ \forall i$$

$$X_j \geq 0 \ \forall j$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Reprenons alors le problème de notre entreprise. Écrivons le sous sa forme canonique (sous sa forme simple), puis sous sa forme standard.

Forme canonique

$\text{Max } 4X_1 + 12X_2 + 3X_3$

$X_1 \leq 1000$

$X_2 \leq 500$

$X_3 \leq 1500$

$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 6750$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Reprenons alors le problème de notre entreprise. Écrivons le sous sa forme canonique (sous sa forme simple), puis sous sa forme standard.

Forme canonique

$$\text{Max } 4X_1 + 12X_2 + 3X_3$$

$$X_1 \leq 1000$$

$$X_2 \leq 500$$

$$X_3 \leq 1500$$

$$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 6750$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Forme standard

$$\text{Max } 4X_1 + 12X_2 + 3X_3 + (0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7)$$

$$X_1 + X_4 = 1000$$

$$X_2 + X_5 = 500$$

$$X_3 + X_6 = 1500$$

$$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_7 = 6750$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Le principe du simplexe est simple, nous partons d'une solution admissible où les variables à déterminer sont mises à zéro (on parle de variables hors-base). Par conséquent, les variables d'écart sont non nulles afin de respecter les contraintes (on parle de variables de base).

Nous allons alors exprimer les variables de base en fonction des variables hors-base. Puis, l'objectif va être de maximiser la fonction. Pour cela, nous allons privilégier le coefficient (le bénéfice marginal) le plus élevé.

Attention

Il faut respecter les contraintes.

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Le principe du simplexe est simple, nous partons d'une solution admissible où les variables à déterminer sont mises à zéro (on parle de variables hors-base). Par conséquent, les variables d'écart sont non nulles afin de respecter les contraintes (on parle de variables de base).

Nous allons alors exprimer les variables de base en fonction des variables hors-base. Puis, l'objectif va être de maximiser la fonction. Pour cela, nous allons privilégier le coefficient (le bénéfice marginal) le plus élevé.

Attention

Il faut respecter les contraintes.

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Exprimons les variables de base en fonction des variables hors-base.

$$\begin{cases} X_4 = 1000 - X_1 \\ X_5 = 500 - X_2 \\ X_6 = 1500 - X_3 \\ X_7 = 6750 - 3X_1 - 6X_2 - 2X_3 \\ z = 0 + 4X_1 + 12X_2 + 3X_3 \end{cases}$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Exprimons les variables de base en fonction des variables hors-base.

$$\begin{cases} X_4 = 1000 - X_1 \\ X_5 = 500 - X_2 \\ X_6 = 1500 - X_3 \\ X_7 = 6750 - 3X_1 - 6X_2 - 2X_3 \\ z = 0 + 4X_1 + 12X_2 + 3X_3 \end{cases}$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Pour maximiser le profit, on choisit tout d'abord d'accroitre X_2 et les autres variables hors-base restent nulles :

$$\begin{cases} X_4 = 1000 \\ X_5 = 500 - X_2 \\ X_6 = 1500 \\ X_7 = 6750 - 6X_2 \\ z = 0 + 12X_2 \end{cases}$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Pour maximiser le profit, on choisit tout d'abord d'accroitre X_2 et les autres variables hors-base restent nulles :

$$\begin{cases} X_4 = 1000 \\ X_5 = 500 - X_2 \\ X_6 = 1500 \\ X_7 = 6750 - 6X_2 \\ z = 0 + 12X_2 \end{cases}$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

On ne peut pas accroitre X_2 comme on veut, il faut en effet respecter les contraintes. En l'occurrence, si l'on accroit X_2, il faut tenir compte du fait que X_5 et X_7 doivent être ≥ 0. On obtient alors un petit système à résoudre.

$$\begin{cases} X_2 \leq 500 \text{ avec } X_5 \geq 0 \\ 6X_2 \leq 6750 \text{ avec } X_7 \geq 0 \end{cases}$$

Au maximum, on peut accroitre X_2 de 500.

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

On ne peut pas accroitre X_2 comme on veut, il faut en effet respecter les contraintes. En l'occurrence, si l'on accroit X_2, il faut tenir compte du fait que X_5 et X_7 doivent être ≥ 0. On obtient alors un petit système à résoudre.

$$\begin{cases} X_2 \leq 500 \text{ avec } X_5 \geq 0 \\ 6X_2 \leq 6750 \text{ avec } X_7 \geq 0 \end{cases}$$

Au maximum, on peut accroitre X_2 de 500.

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

On ne peut pas accroitre X_2 comme on veut, il faut en effet respecter les contraintes. En l'occurrence, si l'on accroit X_2, il faut tenir compte du fait que X_5 et X_7 doivent être ≥ 0. On obtient alors un petit système à résoudre.

$$\begin{cases} X_2 \leq 500 \text{ avec } X_5 \geq 0 \\ 6X_2 \leq 6750 \text{ avec } X_7 \geq 0 \end{cases}$$

Au maximum, on peut accroitre X_2 de 500.

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

On obtient donc :

$$\begin{cases} X_4 = 1000 \\ X_5 = 0 \\ X_6 = 1500 \\ X_7 = 3750 \\ z = 6000 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 500 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Désormais, il faut réécrire notre système en respectant les variables hors-base et les variables de base.

$$\begin{cases} X_4 = 1000 - X_1 \\ X_2 = 500 - X_5 \\ X_6 = 1500 - X_3 \\ X_7 = 3750 - 3X_1 + 6X_5 - 3X_3 \\ z = 6000 + 4X_1 - 12X_5 + 3X_3 \end{cases}.$$

Comme il y a des coefficients de z qui sont supérieurs à zéro, il est encore possible d'augmenter les bénéfices de notre entreprise. On continuera jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'augmenter les bénéfices.

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Désormais, il faut réécrire notre système en respectant les variables hors-base et les variables de base.

$$\begin{cases} X_4 = 1000 - X_1 \\ X_2 = 500 - X_5 \\ X_6 = 1500 - X_3 \\ X_7 = 3750 - 3X_1 + 6X_5 - 3X_3 \\ z = 6000 + 4X_1 - 12X_5 + 3X_3 \end{cases}.$$

Comme il y a des coefficients de z qui sont supérieurs à zéro, il est encore possible d'augmenter les bénéfices de notre entreprise. On continuera jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'augmenter les bénéfices.

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Exerçons nous en résolvant le programme linaire précédant à l'aide du simplexe.

Maximiser : $4X_1 + 12X_2$

Sous les contraintes :

$$X_1 \leq 1000$$

$$X_2 \leq 500$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 1750$$

$$X_1 \ , \ X_2 \geq 0$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Exerçons nous en résolvant le programme linaire initial à l'aide du simplexe.

Maximiser : $4X_1 + 12X_2$

Sous les contraintes :

$$X_1 \leq 1000$$

$$X_2 \leq 500$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 1750$$

$$X_1 \ , X_2 \geq 0$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : l'algorithme du simplexe

Exerçons nous encore en résolvant le programme linaire suivant l'aide du simplexe.

Maximiser : $4X_1 + 12X_2$

Sous les contraintes :

$$X_1 \leq 1000$$

$$X_2 \leq 500$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 2200$$

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

Formulations et résolutions mathématiques

Un exemple de résolution exacte : Exercice

Une usine produit deux ciments rapportant respectivement 50 euros et 70 euros par tonne. Pour 1 tonne de ciment 1, il faut 40 minutes de four et 20 minutes de broyage. Pour 1 tonne de ciment 2, il faut 30 minutes de four et 30 minutes de broyage. Le four est disponible 6h par jour et le broyeur est disponible 8h par jour. Quelles quantités fabriquer par jour pour maximiser le profit ?

1. Ecrire sous forme mathématique le problème donné.
2. Résoudre numériquement le problème.

Le problème de transport

Formulation du problème

On désire acheminer des marchandises de n dépôts à m points de vente. On connait les coûts de transport (C_{ij}) induits pour chaque couple dépôts (i) - points de vente (j). On connait aussi les stocks des dépôts (S_i) et les niveaux de demande des points de vente (D_j). On recherche alors pour chaque couple (i, j) les quantités X_{ij} à transporter afin de minimiser les coûts de transport. Ce problème s'écrit sous la forme d'un programme linéaire.

Formulation mathématique

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

sous les contraintes : $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \geq D_j \; \forall j$ et $\sum_{j=1}^{m} X_{ij} \leq S_i \; \forall i$

Le problème de transport

Formulation du problème

On désire acheminer des marchandises de n dépôts à m points de vente. On connait les coûts de transport (C_{ij}) induits pour chaque couple dépôts (i) - points de vente (j). On connait aussi les stocks des dépôts (S_i) et les niveaux de demande des points de vente (D_j). On recherche alors pour chaque couple (i, j) les quantités X_{ij} à transporter afin de minimiser les coûts de transport. Ce problème s'écrit sous la forme d'un programme linéaire.

Formulation mathématique

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

$$\text{sous les contraintes : } \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \geq D_j \ \forall j \text{ et } \sum_{j=1}^{m} X_{ij} \leq S_i \ \forall i$$

Le problème de transport

Des algorithmes approchés

Notre problème est bien un problème de programmation linéaire qui peut se résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe. Néanmoins, les temps de résolution sont souvent longs et les calculs pénibles.

C'est pourquoi, on utilise des variantes du simplexe qui vont limiter le nombre d'opérations à effectuer ou des heuristiques.

Différentes variantes pour deux types de solution :

- Les solutions basiques (initiales) : North west Corner Rule ; Minimum cost method ; Penalty Cost (Vogel's Approx)
- Les solutions optimales : Stepping stone ; MODI (Modify distribution)

Le problème de transport

North West Corner Rule

Trois fournisseurs et quatre clients

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	4	6	8	8	40
a_2	6	8	6	7	60
a_3	5	7	6	8	50
	20	30	50	50	

Le problème de transport

North West Corner Rule

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	(4) 20	(6) 20	(8)	(8)	~~40~~ 20
a_2	(6)	(8) 10	(6) 50	(7)	~~60~~ 50
a_3	(5)	(7)	(6)	(8) 50	50
	20	30	50	50	

Coût = 4 x 20 + 6 x 20 + 8 x 10 + 6 x 50 + 8 x 50 = 980

Le problème de transport
Minimum cost method

Trois fournisseurs et quatre clients

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	4	6	8	8	40
a_2	6	8	6	7	60
a_3	5	7	6	8	50
	20	30	50	50	

Le problème de transport

Minimum cost method

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	4 — 20	6 — 20	8	8	~~40~~ ~~20~~
a_2	6	8	6 — 50	7 — 10	~~60~~ ~~10~~
a_3	5	7 — 10	6	8 — 40	~~50~~ 40
	~~20~~	~~30~~	~~50~~	50	

Coût = 4 x 20 + 6 x 20 + 7 x 10 + 6 x 50 + 8 x 40 + 7 x 10 = 960

Le problème de transport

Stepping stone

Une histoire de boucle afin de trouver s'il est possible de faire baisser le coût de transport.

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	(4) 20	(6) 20 -1	(8) +1	(8)	40
a_2	(6)	(8)	(6) 50 -1	(7) 10 +1	60
a_3	(5)	(7) 10 +1	(6)	(8) 40 -1	50
	20	30	50	50	

Coût = 8 - 6 + 7 - 8 + 7 - 6 = +2

Le problème de transport

Stepping stone

Choisir la solution qui est la plus intéressante, puis recalculer les valeurs afin de minimiser (au maximum) les coûts.

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	4 20	6 20	8	8	40
a_2	6	8	6 ~~50~~ 10	7 ~~10~~ 50	60
a_3	5	7 10	6 40	8 0 ~~40~~	50
	20	30	50	50	

Le problème de transport

Exercice

Une entreprise de vélos en libre-service possède 7 agences gérant chacune un certain nombre de bornes. De par les déplacements des clients, chaque mois certaines agences voient leur stock de vélos fortement diminuer, tandis que d'autres au contraire voient leur stock fortement augmenter. Afin de satisfaire la demande, il convient de rééquilibrer les stocks chaque mois.

En l'occurrence, trois agences voient respectivement leur stock augmenter de 140, 130 et 110 vélos tandis que 4 autres voient respectivement leur stock diminuer de 70, 50, 125, et 135 vélos. Les distances entre les agences sont les suivantes :

	4	**5**	**6**	**7**
1	5	9	6	4
2	7	2	8	11
3	3	1	10	14

Le problème de transport

Exercice

1. Mettez le problème donné sous la forme d'un problème de transport
2. Cherchez une solution basique en utilisant la North west Corner Rule
3. Déterminez une solution optimale

Le problème de transport

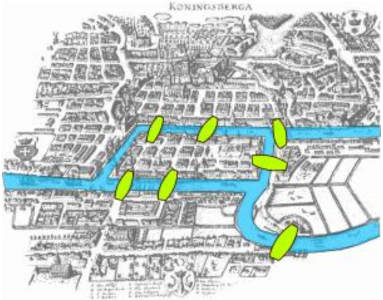
Pour aller plus loin : les autres problèmes classiques

- Le problème du flot de valeur maximale : Au problème précédent, on ajoute des contraintes de capacité en retirant les contraintes de coût, de demande et d'offre. On cherche à maximiser l'envoi d'un stock potentiellement infini. Algorithme de Ford Fulkerson.
- Le problème du flot de coût minimum : Au problème précédent, on réintroduit les contraintes de coût et on fixe un niveau d'offre. Out of kilter.
- Le problème du flot de valeur maximale à coût minimal : On combine les deux problèmes précédents en ne fixant plus l'offre de départ. Algorithme de Roy.
- Le problème du sac à dos.

Organisation de tournées de véhicules

Du plus court chemin à la recherche de chemins particuliers

La théorie des graphes trouve ses origines dans les travaux pionniers de Léonhard Euler. Celui-ci cherchait à résoudre le problème des 7 ponts de Konigsberg. Ce problème cherche un cycle (chemin fermé) passant une seule fois par tous les arcs d'un graphe.

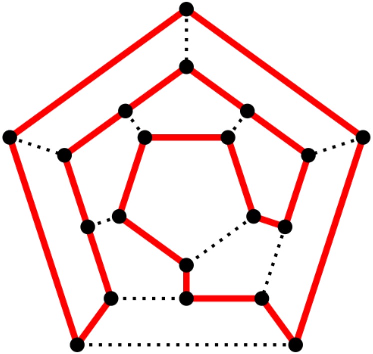


Il démontra que ce problème n'avait pas de solution. Désormais, les graphes qui possèdent cette propriété sont appelés des graphes eulériens.

Organisation de tournées de véhicules

Du plus court chemin à la recherche de chemins particuliers

Un graphe hamiltonien est un graphe possédant au moins un cycle passant une seule fois par tous les sommets du graphe. Un tel cycle élémentaire est alors appelé cycle hamiltonien.



Organisation de tournées de véhicules

Du plus court chemin à la recherche de chemins particuliers

Il est aisé de déterminer si un graphe est eulérien. En revanche, il n'est pas toujours simple de trouver un cycle eulérien.

Il n'existe pas une solution unique permettant de déterminer si un graphe est hamiltonien. On a seulement démontré un certain nombre de conditions mathématiques, qui, si elles sont vérifiées, permettent d'assurer qu'un graphe est hamiltonien, ainsi que des conditions qui, si elles ne sont pas vérifiées, assurent qu'il ne l'est pas.

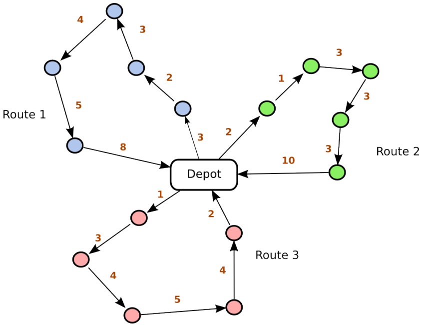
Ainsi, il est plus simple de trouver des cycles hamiltoniens au sein de certains graphes que de déterminer si certains graphes sont hamiltoniens.

Paradoxalement, si les problématiques eulériennes et hamiltoniennes se ressemblent, les problématiques liées à leur résolution sont très différentes.

Organisation de tournées de véhicules

Présentation

Les problèmes de tournées de véhicules constituent une classe de problèmes de recherche opérationnelle et d'optimisation combinatoire. Il s'agit de déterminer les tournées d'une flotte de véhicules afin de livrer une liste de clients, ou de réaliser des tournées d'interventions (opérations de maintenance, réparations, contrôles) ou de visites (visites médicales, commerciales, etc.). Le but est de minimiser le coût de livraison des biens.

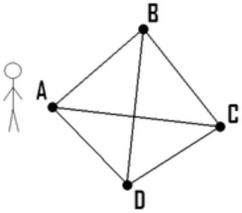


Organisation de tournées de véhicules

Présentation

Ces problèmes sont souvent présentés comme des extensions au problème du voyageur de commerce. Le problème du voyageur de commerce consiste, étant donné un ensemble de villes séparées par des distances données, à trouver le plus court chemin qui relie toutes les villes.

Le problème du voyageur de commerce revient à chercher un cycle hamiltonien (on sait qu'il existe plusieurs cycles hamiltoniens) dans un graphe complet dont les arêtes sont pondérées, en ajoutant une contrainte : le poids de ce cycle doit être minimal.



Organisation de tournées de véhicules

Présentation

Formulation mathématique du problème du voyageur de commerce

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} \text{ avec } X_{ij} = \{0,1\} \text{ et } Y_i \geq 0$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \ \forall j \text{ afin de s'assurer d'arriver une fois de chaque ville}$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = 1 \ \forall i \text{ afin de s'assurer de partir une fois de chaque ville}$$

$$Y_i - Y_j + N \times X_{ij} \leq N - 1 \ \forall i \backslash \{1\} \ \forall j \backslash \{1\} \text{ afin d'éviter les sous-tours}$$

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Principe de l'algorithme :

1. Réduction de la matrice (ligne et colonne cf Méthode hongroise)
2. Choisir la case nulle dont le coût d'éviction est le plus élevé.
3. Enlever la ligne de la ville de départ et la colonne de la ville d'arrivée correspondantes.
4. Rendre infini le coût de retour.
5. Recommencer avec le tableau partiel.
6. Présenter l'algorithme sous la forme d'une arborescence (Branch and Bound, Séparation-Evaluation).
7. Examiner tous les chemins dont le coût est inférieur au premier coût final trouvé.
8. Dérouler l'arborescence jusqu'au bout.

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

La matrice de distances :

↗	A	B	C	D	E	F
A	∞	1	7	3	14	2
B	3	∞	6	9	1	24
C	6	14	∞	3	7	3
D	2	3	5	∞	9	11
E	15	7	11	2	∞	4
F	20	5	13	4	18	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Réduction de la matrice (1) : On soustrait à chaque ligne le plus petit élément et on fait de même pour les colonnes.

↗	A	B	C	D	E	F
A	∞	0	6	2	13	1
B	2	∞	5	8	0	23
C	3	11	∞	0	4	0
D	0	1	3	∞	7	9
E	13	5	9	0	∞	2
F	16	1	9	0	14	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Réduction de la matrice (2) : On soustrait à chaque ligne le plus petit élément et on fait de même pour les colonnes.

↗	A	B	C	D	E	F
A	∞	0	3	2	13	1
B	2	∞	2	8	0	23
C	3	11	∞	0	4	0
D	0	1	0	∞	7	9
E	13	5	6	0	∞	2
F	16	1	6	0	14	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Il conviendra d'ajouter 16 au coût final (correspondant au coût de la réduction).

↗	A	B	C	D	E	F	
A	∝	0	3	2	13	1	-1
B	2	∝	2	8	0	23	-1
C	3	11	∝	0	4	0	-3
D	0	1	0	∝	7	9	-2
E	13	5	6	0	∝	2	-2
F	16	1	6	0	14	∝	-4
			-3				

-3 → +16

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Calculer les coûts d'éviction de chaque case nulle : pour cela, identifier les valeurs minimums des lignes et des colonnes communes à chaque case nulle.

↗	A	B	C	D	E	F
A	∝	$_{2}$ 0	3	2	13	1
B	2	∝	2	8	0	23
C	3	11	∝	0	4	0
D	0	1	0	∝	7	9
E	13	5	6	0	∝	2
F	16	1	6	0	14	∝

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Calculer les coûts d'éviction : sélectionner le coût d'éviction le plus élevé (BE = 6).

↗	A	B	C	D	E	F
A	∞	0,(2)	3	2	13	1
B	2	∞	2	8	0,(6)	23
C	3	11	∞	0,(0)	4	0,(1)
D	0,(2)	1	0,(2)	∞	7	9
E	13	5	6	0,(2)	∞	2
F	16	1	6	0,(1)	14	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Effectuer l'éviction : enlever la ligne de la ville de départ, la colonne de la ville d'arrivée et rendre le coût de retour infini.

↗	A	B	C	D		F
A	∝	0	3	2		1
C	3	11	∝	0		0
D	0	1	0	∝		9
E	13	∝	6	0		2
F	16	1	6	0		∝

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Une fois l'éviction effectuée, doit on réduire le tableau (au moins un zéro par ligne et par colonne) ? Ici non. Avec BE le coût est alors de 16 et sans BE le coût est de 22.

On calcule une nouvelle fois les coûts d'éviction. On sélectionne arbitrairement DA = 3.

↗	A	B	C	D	F
A	∞	0,(2)	3	2	1
C	3	11	∞	0,(0)	0,(1)
D	0,(**3**)	1	0,(**3**)	∞	9
E	13	∞	6	0,(2)	2
F	16	1	6	0,(1)	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Le tableau cette fois-ci n'est pas réduit. Il faut alors le réduire. Le coût de la réduction est de 3. Ainsi, sans DA le coût est de 19 et avec DA le coût est aussi de 19. On choisit de continuer avec DA.

↗	B	C	D	F
A	0,(**2**)	3	∞	1
C	11	∞	0,(0)	0,(1)
E	∞	6	0,(2)	2
F	1	6	0,(1)	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

On calcule les coûts d'éviction. On choisit AC = 3.

↗	B	C	D	F
A	0,(1)	0,(**3**)	∞	1
C	11	∞	0,(0)	0,(1)
E	∞	3	0,(2)	2
F	1	3	0,(1)	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

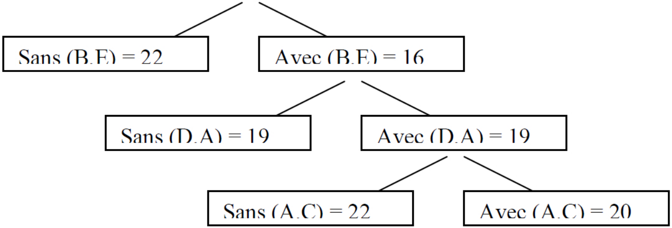
Un nouvelle fois le tableau n'est pas réduit. Sans AC on obtient 22 et avec AC on obtient 20.

$\nearrow$	B	D	F
C	11	∞	0
E	∞	0	2
F	1	0	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Souvenons nous. Le coût du chemin avec BE, DA, AC (20) est supérieur au coût du chemin BE, sans DA (19), il nous faut examiner cette branche.



Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

On reprend un tableau sans DA. On choisit alors CA.

↗	A	B	C	D	F
A	∞	0,(2)	3	2	1
C	0,(10)	11	∞	0,(0)	0,(1)
D	∞	1	0,(4)	∞	9
E	10	∞	6	0,(2)	2
F	13	1	6	0,(1)	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

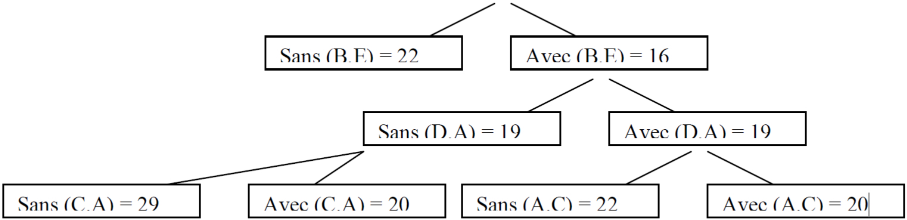
Le tableau n'est pas réduit. Sans CA on obtient un coût de 29 et avec CA on obtient un coût de 20.

↗	B	C	D	F
A	0,(2)	∞	2	1
D	1	0,(4)	∞	9
E	∞	6	0,(2)	2
F	1	6	0,(1)	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Comme aucune branche à gauche ne vaut moins de 20, on peut choisir de reprendre l'exploration à droite.



Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

On reprend le tableau du chemin BE, DA, AC. On choisit alors CF. On n'a pas besoin de réduire le tableau. Le coût avec CF est de 20 et sans CF le coût est de 32.

↗	B	D	F
C	10	∞	0,(12)
E	∞	0,(2)	2
F	0,(10)	0,(1)	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

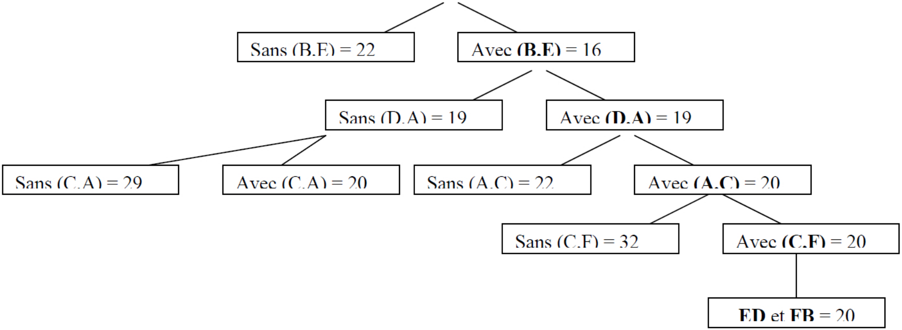
On obtient alors le tableau suivant. On peut ainsi rajouter ED et FB sans accroitre le coût.

↗	B	D
E	∞	0
F	0	∞

Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little

Finalement, on obtient l'arborescence suivante :



Organisation de tournées de véhicules

Algorithme de Little : Exercice

En termes d'exercice, il convient simplement de chercher à résoudre différents cas. Ici, à partir de 6 villes (A, B, C, D, E et F), déterminez le cycle hamiltonien le plus court.

	A	B	C	D	E	F
A	–	6	7	3	1	3
B	7	–	8	2	9	7
C	5	10	–	10	1	7
D	8	6	5	–	5	1
E	7	7	6	7	–	4
F	9	8	8	5	3	–

Organisation de tournées de véhicules

Au delà du problème du voyageur de commerce

Le problème classique de tournées de véhicules généralise le problème du voyageur de commerce, en ne cherchant pas à identifier un cycle hamiltonien mais plutôt un nombre donné de cycles (Algorithme de Clarke and Wright).

Il existe plusieurs variantes au problème classique de tournées de véhicules :

- Les tournées de véhicules à capacité limitée : problème auquel on rajoute souvent des contraintes liées aux ressources et aux clients.
- Les tournées de véhicules avec fenêtre de temps : pour chaque client on impose une fenêtre de temps dans laquelle la livraison doit être effectuée ;
- Les tournées de véhicules avec collecte et livraison : des marchandises doivent être déplacées des sites de collecte vers des sites de livraison (un problème de transport cherchant des cycles).

Le problème p-median

Présentation du problème p-median

En 1909, Weber se questionne sur la meilleure localisation à donner à une industrie donnée (un produit donné). Il fonde sa réflexion sur les coûts de transport.

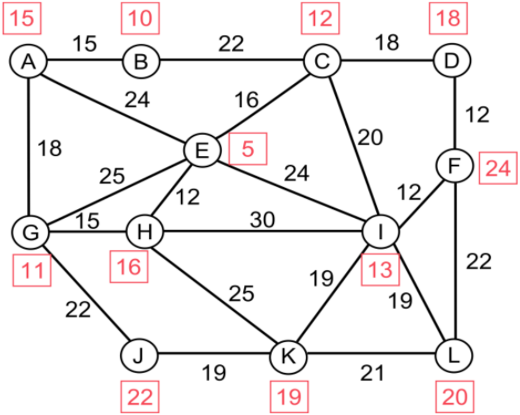
Ce problème donne naissance au problème p-median qui cherche, pour un nombre donné d'installations (p), à minimiser la somme des distances séparant les installations retenues aux clients.

Les clients sont supposés se rendre à l'installation la plus proche.

Très souvent, les lieux possibles d'implantation sont les mêmes que les lieux où se trouvent les clients. Le problème s'exprime alors ainsi : étant donné n villes, on cherche à ouvrir p installations parmi ces n villes, de telle sorte que la somme des distances entre les villes et l'installation la plus proche soit minimale.

Le problème p-median

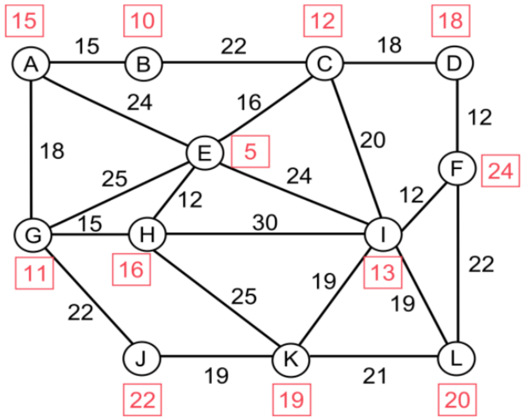
Présentation du problème p-median



Où dois-je implanter mes magasins pour limiter les distances parcourues par mes futurs clients (en rouge) ? En l'occurrence, si je dois ouvrir deux magasins, dois-je choisir les sites B et K ou G et F ou ... ?

Le problème p-median

Présentation du problème p-median



Où dois-je implanter mes entrepôts pour limiter les coûts induits par les trajets parcourus par mes camions pour desservir mes futurs clients ? Si je dois ouvrir trois entrepôts, dois-je choisir les sites B, C et K ou ... ?

Le problème p-median

Un problème de localisation-allocation parmi d'autres

Définition : Problèmes de localisation-allocation

Ensemble de problèmes cherchant à déterminer les meilleures localisations pour des installations et l'allocation des clients à ces installations.

Cette famille de problèmes est ancienne : Cooper (1963) ; Weber (1909).

Il existe désormais de nombreux problèmes de localisation-allocation et de nombreuses variantes à ces problèmes.

Ce sont des problèmes fondamentaux du géomarketing ou encore de la logistique et dans une moindre mesure de l'aménagement et du transport.

Ces problèmes d'optimisation mathématique sont difficiles à résoudre. Certains peuvent se formuler sous la forme d'un programme linéaire.

Le problème p-median

Les éléments constitutifs des problèmes de localisation-allocation

Ces problèmes sont caractérisés par :

- **La localisation potentielle de l'offre** : les installations, les points de vente, les centres commerciaux, les entrepôts, les hôpitaux...
- **La localisation de la demande** : les clients, les usagers, les marchandises...
- **Les distances (ou les coûts induits par ces distances) entre l'offre et la demande** : un distancier, un tableau de coûts...
- **Des hypothèses** : les clients se déplacent toujours en suivant les itinéraires les plus courts, les clients choisissent toujours de se rendre uniquement à l'installation la plus proche, le coût de l'installation est toujours le même partout...

Le problème p-median

Classification des problèmes de localisation-allocation

Les problèmes à entrée libre : on ne connait pas a priori le nombre d'installations, ce sont les contraintes et les objectifs qui vont définir ce nombre (set covering problem ou problème de couverture).

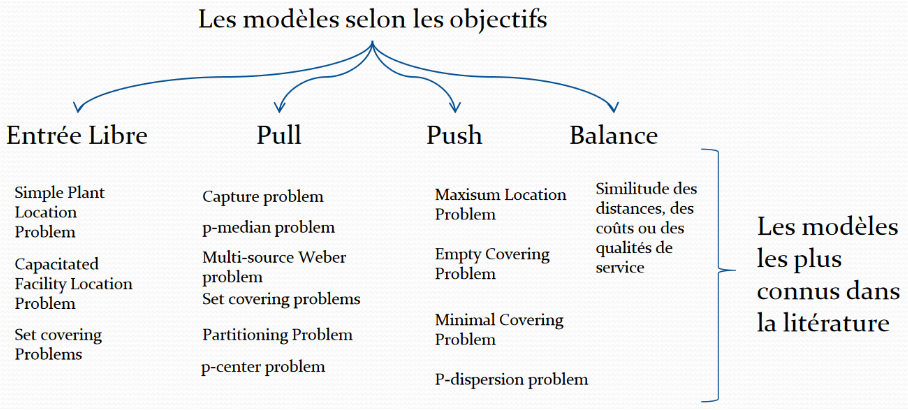
Les problèmes Pull : on cherche là où on va placer les installations de façon à être le plus proche des clients ou le moins éloigné (p-median ou p-centre).

Les problèmes Push : on cherche à éloigner au maximum les installations de là où se situe la demande (p-dispersion).

Les problèmes Balance : on cherche un compromis entre les modèles pull et push, on cherche donc à ne pas être trop près, mais aussi à ne pas être trop loin de la demande.

Le problème p-median

Classification des problèmes de localisation-allocation



Le problème p-median

Formulation mathématique

Formulation mathématique

Fonction objectif : Min $\sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} X_{i,j} \times D_{i,j}$

S.C chaque client doit être affecté : $\sum_{j}^{N} X_{i,j} = 1 \ \forall i$

S.C le nombre d'installations doit être égal à P : $\sum_{j}^{N} Y_j = P$

S.C les clients ne sont affectés qu'à un site ouvert : $\sum_{i}^{N} X_{i,j} \leq Y_j \times N \ \forall j$

Les variables $X_{i,j}$ et Y_j sont binaires.

Le problème p-median

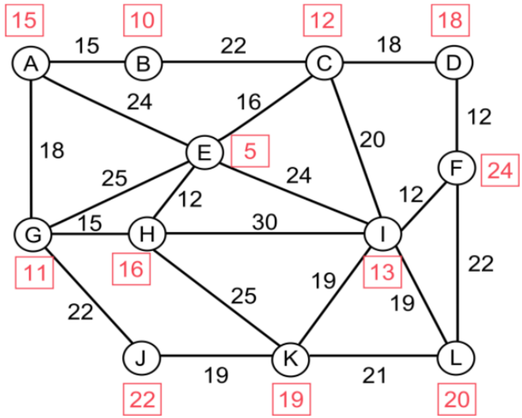
Distancier

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	15	37	55	24	60	18	33	48	40	58	67
B	15	0	22	40	38	52	33	48	42	55	61	61
C	37	22	0	18	16	30	41	28	20	58	39	39
D	55	40	18	0	34	12	59	46	24	62	43	34
E	24	38	16	34	0	36	25	12	24	47	37	43
F	60	52	30	12	36	0	57	42	12	50	31	22
G	18	33	41	59	25	57	0	15	45	22	40	61
H	33	48	28	46	12	42	15	0	30	27	25	46
I	48	42	20	24	24	12	45	30	0	38	19	19
J	40	55	58	62	47	50	22	37	38	0	19	40
K	58	61	39	43	37	31	40	25	19	19	0	21
L	67	61	39	34	43	22	61	46	19	40	21	0

Dans ce cours, les lieux en ligne correspondent aux points de départ, en l'occurrence aux clients. Les colonnes correspondent aux installations possibles considérées ici comme des points d'arrivée. La distance entre un lieux i de certains clients et une installation possible j s'écrit $D_{i,j}$.

Le problème p-median

Du distancier au tableau de coûts



Si ici, la distance séparant A de B est la même que celle séparant B de A (15 km). Le coût lié au déplacement de A vers B ($15 \times 15 = 225$) est différent de celui de B vers A ($15 \times 10 = 150$).

Le problème p-median

Tableau de coûts

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	441	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

Dans ce cours, les lieux en ligne correspondent aux points de départ, en l'occurrence aux clients. Les colonnes correspondent aux installations possibles considérées ici comme des points d'arrivée. Le coût entre un lieux i de certains clients et une installation possible j s'écrit $C_{i,j}$.

Le problème p-median

Un exemple d'heuristique : l'algorithme glouton

Trouver une solution optimale dans un ensemble discret et fini est un problème facile en théorie : il suffit d'essayer toutes les solutions et de comparer leur qualité pour identifier la meilleure. Cependant, en pratique, l'énumération de toutes les solutions peut prendre trop de temps.

Pour faire face à ce problème, si un problème se prête à une décomposition étape par étape (itérative), *il est possible de choisir à chaque étape la solution qui parait la meilleure sans jamais la remettre en question*. C'est le principe de l'algorithme glouton.

Dans la vie de tous les jours, il est très probable que vous utilisiez un algorithme glouton. Ainsi, si vous devez payer 72 centimes en donnant le moins de pièces possibles, vous allez intuitivement chercher une pièce de 50 centimes, puis de 20 centimes, puis de 2 centimes. Vous cherchez donc à chaque étape à vous rapprocher le plus vite possible du résultat visé. Vous optez pour une stratégie gloutonne.

Le problème p-median

L'algorithme glouton

1. A partir du distancier initial, on calcule la somme des valeurs de chaque colonne. La valeur la plus faible est alors considérée comme optimale, le site correspondant à cette colonne est donc retenu.
2. Ensuite, on cherche à reproduire le calcul précédent en tenant compte qu'un premier site existe déjà. Pour cela, entre la valeur présente dans une colonne et celle correspondante à la colonne du site retenu, on retient la valeur minimale.
3. Lorsque l'on a fait ça pour toutes les colonnes, on peut calculer la somme des valeurs de chaque colonne. La valeur la plus faible est alors considérée comme optimale, le site correspondant est donc retenu.
4. Ensuite, on reprend l'étape 2 en tenant compte que deux sites existent déjà. Puis, on passe à l'étape 3 pour identifier le troisième site. On s'arrête lorsque l'on a identifié le nombre de sites souhaités, sinon on retourne à l'étape 2 pour continuer.

Le problème p-median

L'algorithme glouton

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	441	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

Le problème p-median

L'algorithme glouton

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	451	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0
Total	**7816**	**7913**	**5855**	**6457**	**5784**	**5760**	**6936**	**5971**	**4772**	**6886**	**5576**	**6371**

Le problème p-median

L'algorithme glouton

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	720	360	720	270	495	720	600	720	720
B	150	0	220	400	380	420	330	420	420	420	420	420
C	240	240	0	216	192	240	240	240	240	240	240	240
D	432	432	324	0	432	216	432	432	432	432	432	432
E	120	120	80	120	0	120	120	60	120	120	120	120
F	288	288	288	288	288	0	288	288	288	288	288	288
G	198	363	451	495	275	495	0	165	495	242	440	495
H	480	480	448	480	192	480	240	0	480	480	400	480
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	836	836	836	836	836	836	484	814	836	0	418	836
K	361	361	361	361	361	361	361	361	361	361	0	381
L	380	380	380	380	380	380	380	380	380	380	380	0
Total	**3485**	**3725**	**3943**	**4296**	**3696**	**4268**	**3145**	**3655**	**4772**	**3563**	**3858**	**4392**

Le problème p-median

L'algorithme glouton

Numéro du point de ventes	Site	Coût total
1	I	4772
2	G	3145
3	F	2641
4	J	2157
5	A	1707

Recherche des plus courts chemins

Introduction

En matière de logistique, les transports jouent un rôle éminemment important. La minimisation des coûts (économiques ou temporels) de transport est alors bien souvent primordiale.

Un des problèmes fondamentaux en matière de transport est d'identifier des plus courts chemins au sein d'un graphe (réseau).

Pour identifier des plus courts chemins, il faut avoir recours à des algorithmes (comme celui du simplexe).

Compte tenu de la complexité (du nombre de solutions à explorer) de ce problème apparemment simple, il est parfois pertinent d'avoir recours à des algorithmes heuristiques.

Recherche des plus courts chemins

Introduction

Un graphe G = (N ; L) se définit mathématiquement comme un ensemble fini de sommets N et un ensemble fini de liens L.

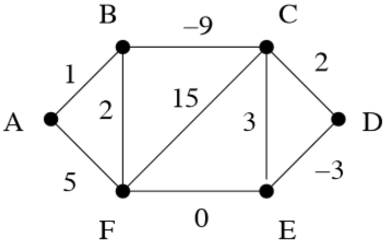
Les graphes valués (pondérés) sont des graphes où les liens traduisent la présence et l'intensité (la distance ; le poids) de la relation.

On appelle chaîne un parcours, sur un graphe non orienté allant d'un sommet à un autre en empruntant des arêtes. Lorsque le graphe est orienté, on utilise le terme chemin.

Soit G = (N,L,v) un graphe valué. La valuation ou longueur d'un chemin (ou d'une chaîne) est la somme des valuations de chacun des arcs qui le composent.

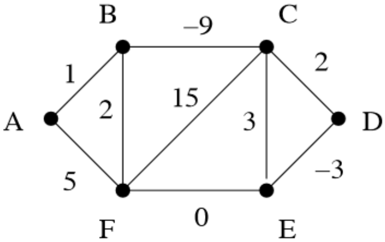
Recherche des plus courts chemins

Introduction : la notion de chaine



Recherche des plus courts chemins

Introduction : la notion de chaine



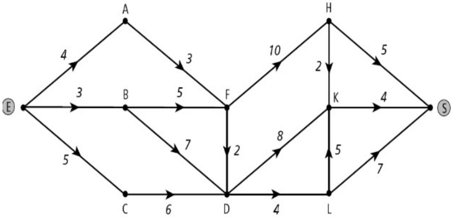
La valuation de la chaîne (A, F, C, E, D) est $5 + 15 + 3 - 3 = 20$

Recherche des plus courts chemins

Le problème

Les problèmes de cheminement constituent des problèmes classiques de la théorie des graphes. L'objectif est de calculer une route entre des sommets d'un graphe qui minimise ou maximise une certaine fonction économique.

Le problème le plus classique consiste à déterminer le chemin de poids minimal (celui qui minimise la somme des valuations des arêtes traversées) menant d'un sommet origine à un sommet final. C'est le problème du plus court chemin. En règle générale, pour ce problème, les poids sont considérés positifs.



Recherche des plus courts chemins

Formulation mathématique

Formulation

Minimiser :

$$\sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}$$

Sous les contraintes :

$$\sum_j X_{ij} - \sum_j X_{ji} = \begin{cases} 1 \text{ si noeud i} = \text{s} \\ 0 \text{ autrement} \\ -1 \text{ si noeud i} = \text{t} \end{cases}$$

$$X_{ij} = 0, 1$$

Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : Présentation

L'algorithme Dijkstra est un algorithme très utilisé pour calculer les plus courts chemins dans un graphe.

C'est un algorithme exact relativement rapide.

Néanmoins, il ne fonctionne que pour les graphes dont les valuations sont positives.

L'algorithme Dijkstra est un algorithme du type parcours en largeur ou BFS (Breadth First Search).

À la différence d'un algorithme DFS (Depth First Search) où l'on explore un sommet adjacent à celui de départ, puis un autre adjacent au précédent, et ainsi de suite jusqu'à se retrouver bloqué et revenir en arrière, on examine ici dès le départ tous les sommets adjacents au premier.

Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : Principe

On construit petit à petit, à partir du sommet origine S_0, un ensemble M de sommets marqués.

Pour tous les sommet marqués, l'estimation d(s) est égale à la distance d(S_0,s).

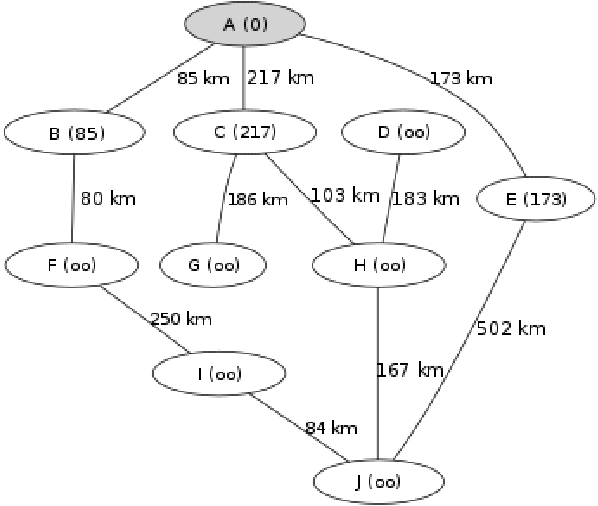
A chaque étape, on sélectionne le sommet x non marqué (pouvant être directement atteint par un sommet marqué) dont la distance estimée d(x) est la plus petite parmi tous les sommets non marqués.

On marque alors le sommet x (on rajoute x à l'ensemble M des sommets marqués), puis on met à jour à partir de x les distances estimées des successeurs non marqués de x.

On recommence, jusqu'à épuisement des sommets non marqués.

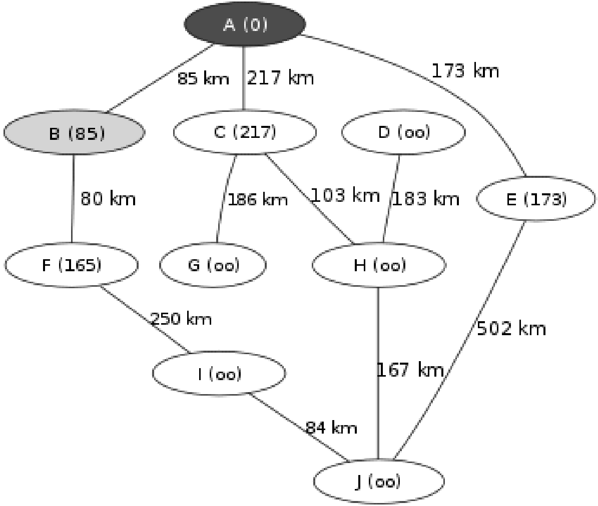
Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : résolution graphique



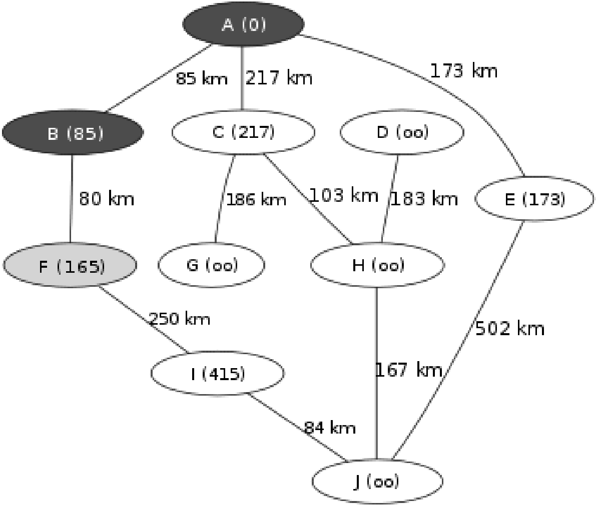
Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : résolution graphique



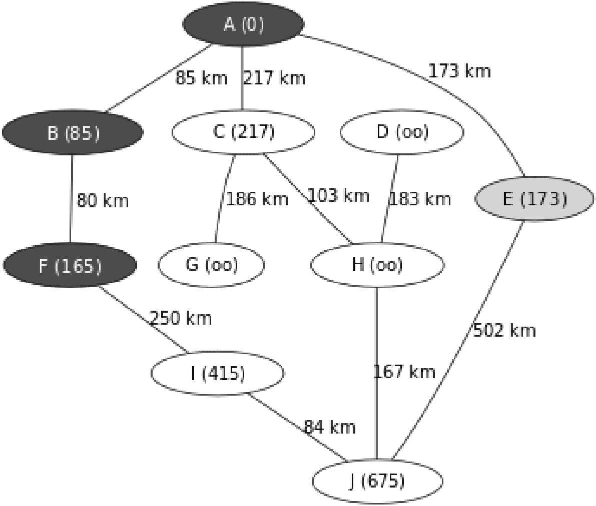
Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : résolution graphique



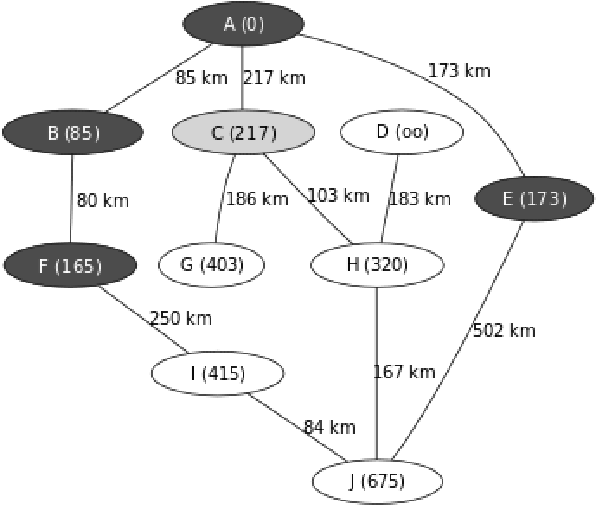
Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : résolution graphique



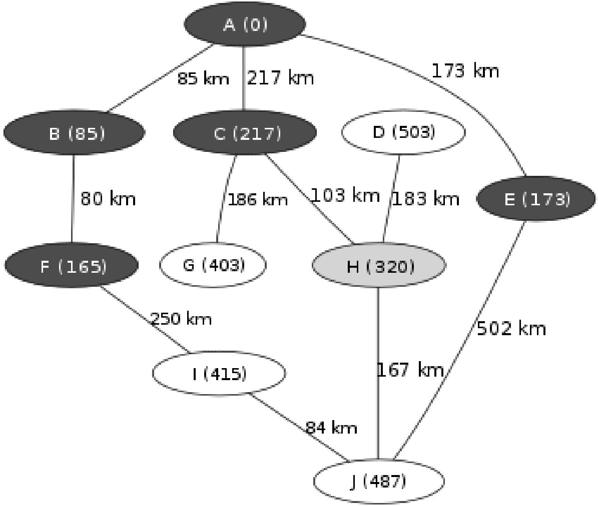
Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : résolution graphique



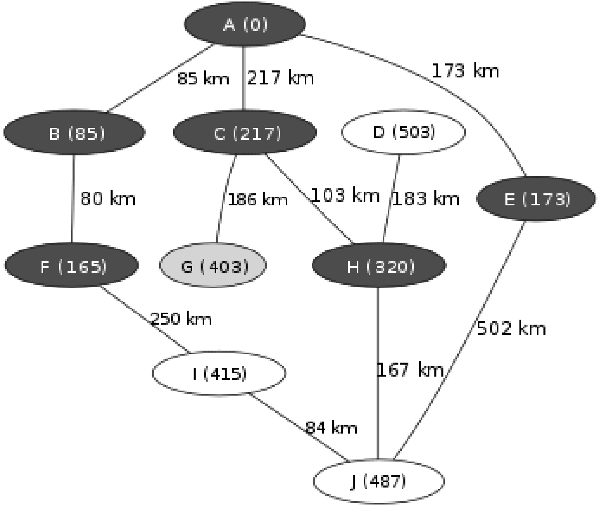
Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : résolution graphique



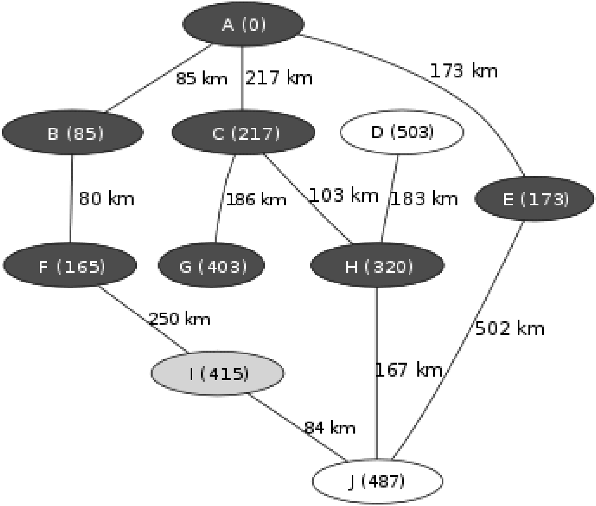
Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : résolution graphique



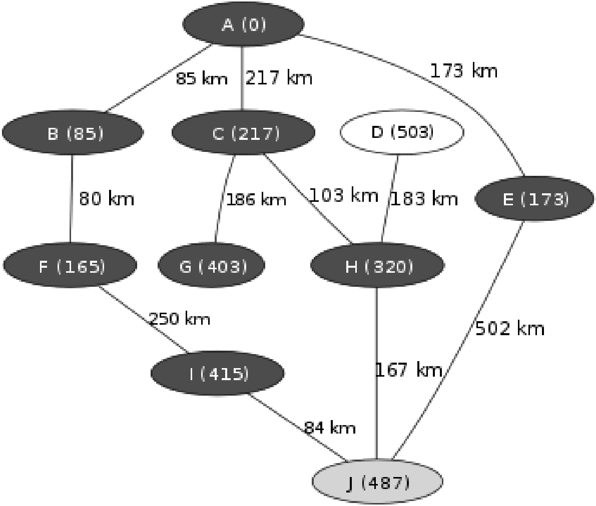
Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : résolution graphique



Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : résolution graphique



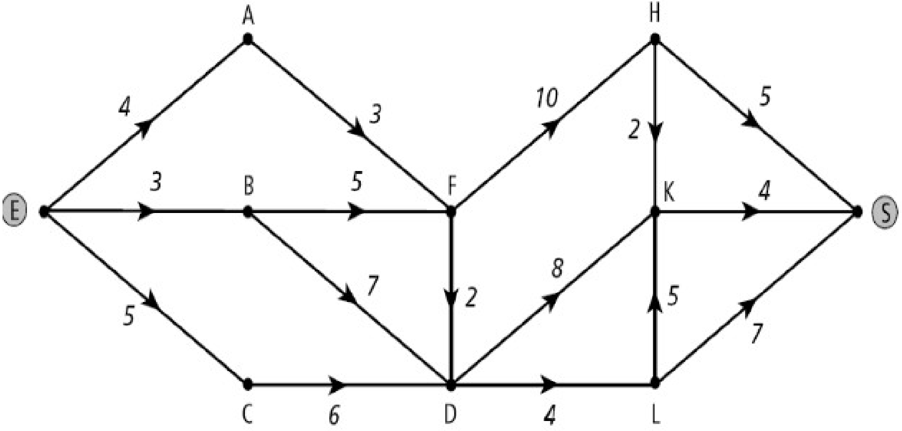
Recherche des plus courts chemins

L'algorithme Dijkstra : sous forme d'un tableau

	à B	à C	à D	à E	à F	à G	à H	à I	à J
A	85	217	∞	173	∞	∞	∞	∞	∞
B(85_A)	-	217	∞	173	165	∞	∞	∞	∞
F(165_B)	-	217	∞	173	-	∞	∞	415	∞
E(173_A)	-	217	∞	-	-	∞	∞	415	675
C(217_A)	-	-	∞	-	-	403	320	415	675
H(320_C)	-	-	503	-	-	403	-	415	487
G(403_C)	-	-	503	-	-	-	-	415	487
I(415_F)	-	-	503	-	-	-	-	-	~~499~~487
J(487_H)	-	-	503	-	-	-	-	-	-
D(503_H)	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Recherche des plus courts chemins

Exercice



Recherche des plus courts chemins

Autres méthodes

Il existe d'autres méthodes pour trouver des plus courts chemins :

- Algorithme de Ford-Bellman (permettant de résoudre le problème pour des graphes comportant des valuations négatives).
- Algorithme de Floyd-Warshall (permettant d'identifier tous les plus courts chemins dans un graphe).

Il existe aussi de très bonnes heuristiques :

- Algorithme A*, qui est très rapide à condition d'avoir une bonne fonction heuristique. L'optimalité n'est garantie que sous certaines conditions.
- La distance à vol d'oiseau.

Résolution sous Excel

Présentation du solveur

Excel inclut un solveur de programmation mathématique. Il permet de définir et de résoudre des programmes linéaires ou non linéaires. Les variables peuvent être réelles, entières ou binaires. La fonction-objectif peut être minimisée ou maximisée.

Le solveur n'est pas toujours installé. Pour l'installer, il faut aller dans "Fichier -> Options -> Compléments".

Le solveur est alors disponible dans "Données -> Analyse -> Solveur".

Résolution sous Excel

Présentation du solveur

Pour utiliser le solveur, il faut tout d'abord définir une cellule spécifique à la fonction de coût.

Il convient pour cela de définir une cellule pour chaque variable (ces variables sont initialement mises à zéro) qui compose la fonction de coût.

Il convient aussi de définir les cellules correspondant aux autres données du problème (les contraintes).

Les contraintes sont alors définies à partir du solveur en sélectionnant les variables, les données concernées et un opérateur.

Le plus important pour résoudre un problème donné est de bien le formaliser mathématiquement.

Résolution sous Excel

Présentation du solveur

Par exemple, reprenons le premier exercice donné.

Une entreprise peut fabriquer sur une machine donnée (travaillant 45 heures par semaine) trois produits (P1, P2 et P3). Cette machine ne peut produire qu'un seul produit à la fois (le temps de réglage est négligeable). A l'unité, ces produits rapportent respectivement 4 euros, 12 euros et 3 euros.

Les rendements par heure sont respectivement de 50, 25, 75 unités. D'après une étude de marché la quantité de produits vendus en une semaine n'excède pas 1000 unités pour P1, 500 unités pour P2 et 1500 unités pour P3.

Que doit produire l'entreprise pour maximiser son profit ?

Résolution sous Excel

Présentation du solveur

Les trois produits constituent nos trois variables :

X_1 ; X_2 ; X_3

La fonction-objectif à maximiser est la suivante :

$4X_1 + 12X_2 + 3X_3$

Les contraintes de marché sont les suivantes :

$X_1 \leq 1000$; $X_2 \leq 500$; $X_3 \leq 1500$

La contrainte de production est la suivante :

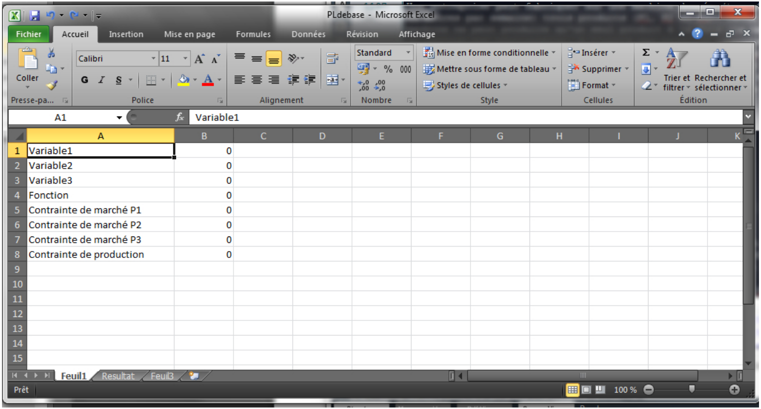
$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 6750$

Les variables sont positives ou nulles :

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Résolution sous Excel

Présentation du solveur



Résolution sous Excel

Présentation du solveur : Exercice

Une usine produit deux ciments rapportant 50 euros et 70 euros par tonne. Pour 1 tonne de ciment, il faut 40 minutes de four et 20 minutes de broyage. Pour 1 tonne de ciment 2, il faut 30 minutes de four et 30 minutes de broyage. Le four est disponible 6h par jour et le broyeur est disponible 8h par jour. Quelles quantités fabriquer pour maximiser le profit ?

1. Ecrire sous forme mathématique le problème donné
2. Le mettre en forme sous excel
3. Le résoudre à l'aide du solveur

Résolution sous Excel

Résolution d'un problème classique : Transportation Problem

Souvenez vous :

Trois fournisseurs et quatre clients

	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	4	6	8	8	40
a_2	6	8	6	7	60
a_3	5	7	6	8	50
	20	30	50	50	

Résolution sous Excel

Résolution d'un problème classique : Transportation Problem

Les douze relations entre fournisseurs et clients constituent nos douze variables :

$X_{a_1 b_1}$, ... , $X_{a_3 b_4}$

La fonction-objectif à minimiser est la suivante :

$4X_{a_1 b_1} + \ldots + 8X_{a_3 b_4}$

Les contraintes de stock sont les suivantes :

$X_{a_1 b_1} + X_{a_1 b_2} + X_{a_1 b_3} + X_{a_1 b_4} \leq 40$; ... ; $X_{a_3 b_1} + X_{a_3 b_2} + X_{a_3 b_3} + X_{a_3 b_4} \leq 50$

Les contraintes de demande sont les suivantes :

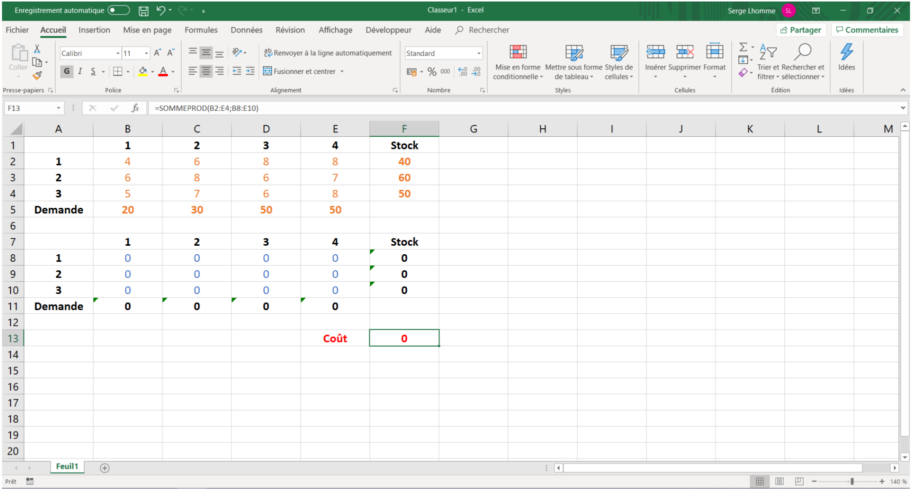
$X_{a_1 b_1} + X_{a_2 b_1} + X_{a_3 b_1} \geq 20$; ... ; $X_{a_1 b_4} + X_{a_2 b_4} + X_{a_3 b_4} \geq 50$

Les variables sont positives ou nulles :

$X_{a_1 b_1}$, ... , $X_{a_3 b_4} \geq 0$

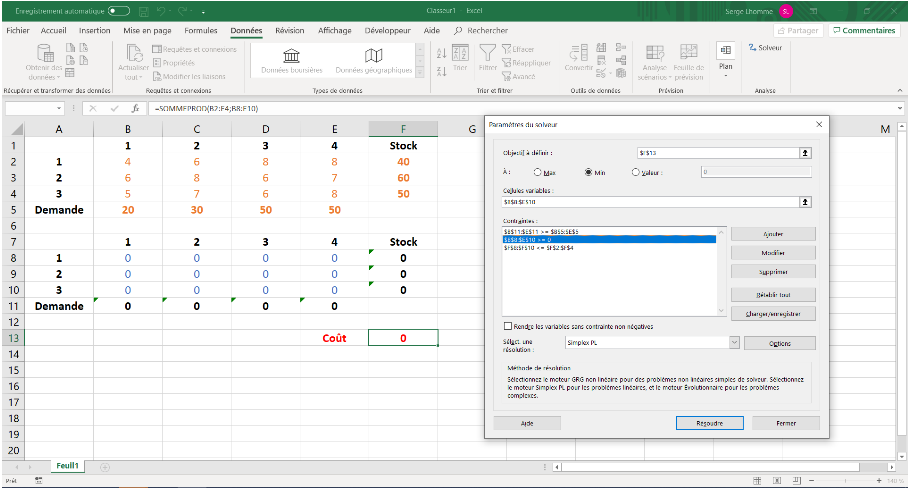
Résolution sous Excel

Résolution d'un problème classique : Transportation Problem



Résolution sous Excel

Résolution d'un problème classique : Transportation Problem



Résolution sous Excel

Formulation et résolution d'un problème classique : Exercice

Une entreprise de vélos en libre-service possède 7 agences gérant chacune un certain nombre de bornes. De par les déplacements des clients, chaque mois certaines agences voient leur stock de vélos fortement diminuer tandis que d'autres au contraire voient leur stock fortement augmenter. Afin de satisfaire la demande, il convient dès lors de rééquilibrer les stocks.

En l'occurrence, trois agences voient respectivement leur stock augmenter de 140, 130 et 110 vélos tandis que 4 autres voient respectivement leur stock diminuer de 70, 50, 125, et 135 vélo. Les distances entre les agences sont les suivantes :

	4	**5**	**6**	**7**
1	5	9	6	4
2	7	2	8	11
3	3	1	10	14

Résolution sous Excel

Résolution du problème p-median

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	441	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

On souhaite ouvrir 3 sites parmi les 12 sites potentiels de sorte à minimiser les coûts de transports pour nos futurs clients.

Résolution sous Excel

Résolution du problème p-median

Les 144 relations entre clients et sites potentiels et les 12 sites potentiels constituent nos 166 variables :

$X_{A,A}$, ... , $X_{L,L}$ et Y_A , ..., Y_L

La fonction-objectif à minimiser est la suivante :

$C_{A,A}X_{A,A} + C_{A,B}X_{A,B}+ \dots +C_{L,L}X_{L,L} = 0X_{A,A} + 225X_{A,B}+ \dots +0X_{L,L}$

Les contraintes d'affectation des clients :

$X_{A,A} + X_{A,B}+ \dots +X_{A,L} = 1 ; \dots ; X_{L,A} + X_{L,B}+ \dots +X_{L,L} = 1$

Les contraintes d'ouverture des sites :

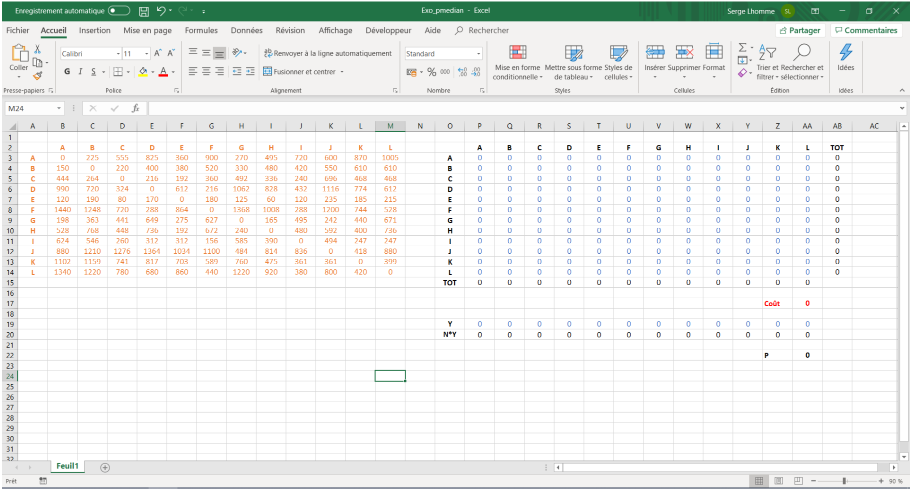
$X_{A,A} + X_{B,A}+ \dots +X_{L,A} \leq 12 \times Y_A ; \dots ; X_{A,L} + X_{B,L}+ \dots +X_{L,L} \leq 12 \times Y_L$

Les variables sont binaires et le nombre de sites à ouvrir est égal à 3 :

$Y_A + Y_B+ , \dots , +Y_L = 3$

Résolution sous Excel

Résolution du problème p-median



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	441	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	TOT
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOT	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Coût 0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N*Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

P 0

Résolution sous Excel

Résolution du problème du voyageur de commerce

La matrice de distances :

↗	A	B	C	D	E	F
A	∞	1	7	3	14	2
B	3	∞	6	9	1	24
C	6	14	∞	3	7	3
D	2	3	5	∞	9	11
E	15	7	11	2	∞	4
F	20	5	13	4	18	∞

Résolution sous Excel

Résolution du problème du voyageur de commerce

Les 36 relations entre les 6 villes et l'ordonnancement des 5 villes autre que A constituent nos 41 variables :

$X_{A,A}$, ... , $X_{F,F}$ et Y_B, ..., Y_F

La fonction-objectif à minimiser est la suivante :

$C_{A,A}X_{A,A} + C_{A,B}X_{A,B} + \dots + C_{F,F}X_{F,F}$

Les contraintes s'assurant que l'on part une fois de chaque ville :

$X_{A,A} + X_{A,B} + \dots + X_{A,F} = 1$; ... ; $X_{F,A} + X_{F,B} + \dots + X_{F,F} = 1$

Les contraintes s'assurant que l'on arrive une fois dans chaque ville :

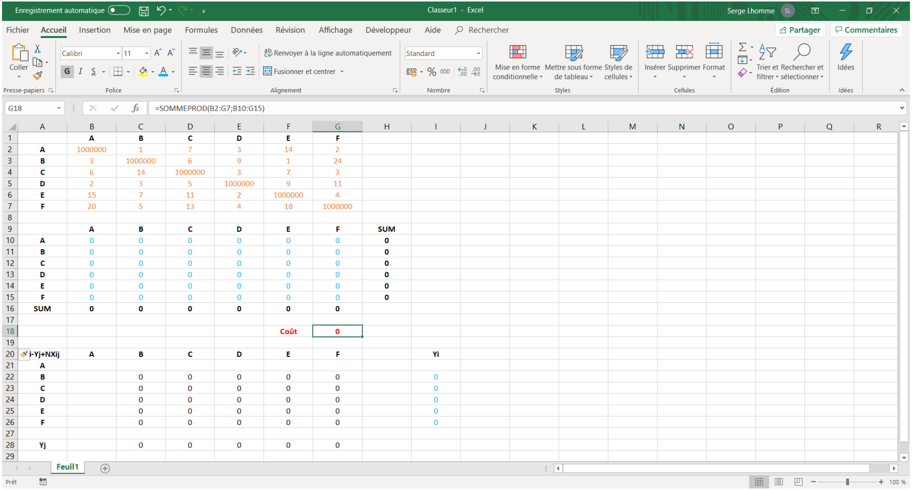
$X_{A,A} + X_{B,A} + \dots + X_{F,A} = 1$; ... ; $X_{A,F} + X_{B,F} + \dots + X_{F,F} = 1$

Les variables X sont binaires et il faut gérer l'ordonnancement sauf pour A :

$Y_B - Y_B + 6 \times X_{B,B} \leq 5$, $Y_B - Y_C + 6 \times X_{B,C} \leq 5$, ... ,
$Y_F - Y_F + 6 \times X_{F,F} \leq 5$ et $Y_B \geq 0$, ... , $Y_F \geq 0$

Résolution sous Excel

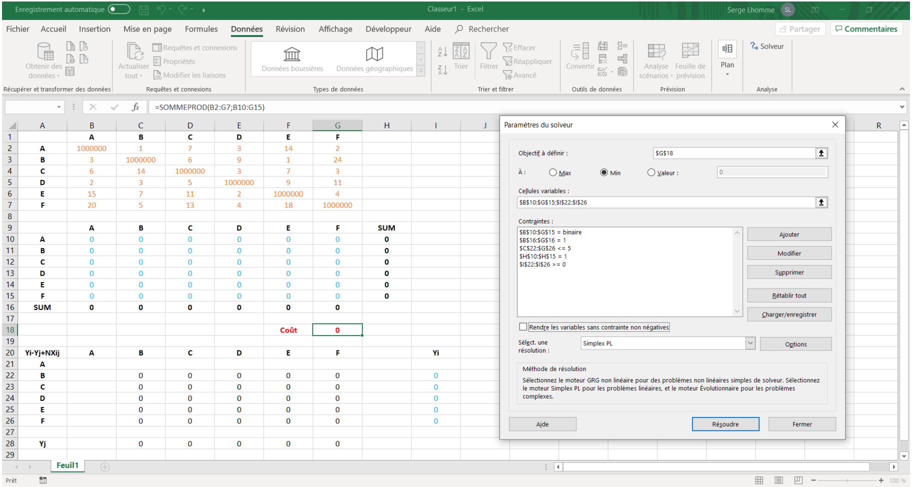
Résolution du problème du voyageur de commerce



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		A	B	C	D	E	F		
2	A	1000000	1	7	3	14	2		
3	B	3	1000000	6	9	1	24		
4	C	6	14	1000000	3	7	3		
5	D	2	3	5	1000000	9	11		
6	E	15	7	11	2	1000000	4		
7	F	20	5	13	4	18	1000000		
8									
9		A	B	C	D	E	F	SUM	
10	A	0	0	0	0	0	0	0	
11	B	0	0	0	0	0	0	0	
12	C	0	0	0	0	0	0	0	
13	D	0	0	0	0	0	0	0	
14	E	0	0	0	0	0	0	0	
15	F	0	0	0	0	0	0	0	
16	SUM	0	0	0	0	0	0		
17									
18						Coût	0		
19									
20	i-Yj+NXij	A	B	C	D	E	F		Yi
21	A								
22	B		0	0	0	0	0		0
23	C		0	0	0	0	0		0
24	D		0	0	0	0	0		0
25	E		0	0	0	0	0		0
26	F		0	0	0	0	0		0
27									
28	Yj		0	0	0	0	0		
29									

Résolution sous Excel

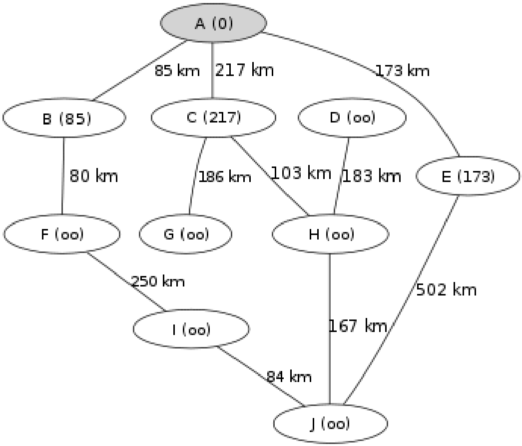
Résolution du problème du voyageur de commerce



Résolution sous Excel

Recherche des plus courts chemins

Souvenez vous :



Résolution sous Excel

Recherche des plus courts chemins

Les onze arcs constituent nos onze variables :

X_{ab} , ... , X_{ij}

La fonction-objectif à minimiser est la suivante :

$85X_{ab}+$ ... $+84X_{ij}$

Les contraintes sur les arcs :

X_{ab} , ... , $X_{ij} = 0$ ou 1

Les contraintes de réseau (de chemin) peuvent être exprimées par sommet :

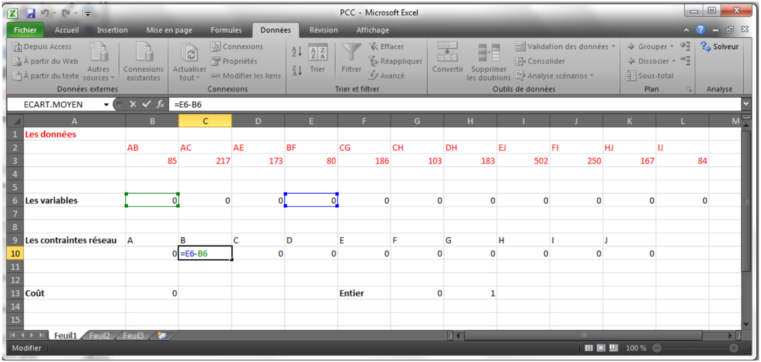
Pour le sommet A : $X_{ab} + X_{ac} + X_{ae} = 1$

Pour le sommet B : $X_{bf} - X_{ab} = 0$

Pour le sommet J : $-X_{ij} - X_{hj} - X_{ej} = -1$

Résolution sous Excel

Recherche des plus courts chemins


PCC - Microsoft Excel

ECART.MOYEN =E6-B6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Les données											
2		AB	AC	AE	BF	CG	CH	DH	EJ	FI	HJ	IJ
3		85	217	173	80	186	103	183	502	250	167	84
4												
5												
6	Les variables	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7												
8												
9	Les contraintes réseau	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
10		0	=E6-B6	0	0	0	0	0	0	0	0	
11												
12												
13	Coût	0				Entier	0	1				

Résolution sous Excel

Recherche des plus courts chemins : Exercice